

FERNUNIVERSITÄT IN HAGEN
Fakultät für Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit

Die Vitali-Menge

vorgelegt von
Paula Schweinberger

Matrikelnummer: 3124339
Studiengang: B.Sc. Mathematik

Erstgutachter: **Prof. Dr. Delio Mugnolo**
Zweitgutachter: **Dr. Kerner**

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das Auswahlaxiom	4
3	Vorbereitendes	5
4	Die Unlösbarkeit des Maßproblems im $\mathbb{R}^d$ und die Existenz nicht messbarer Mengen	8
4.1	Weitere nicht messbare Mengen	14
5	Das Inhaltsproblem	29
6	Das Banach-Tarski Paradoxon	30
7	Ausblick	56
8	Fazit und Schlussbetrachtung	58

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Delio Mugnolo herzlich für die Betreuung dieser Bachelorarbeit und das faszinierende Thema. Ein besonderer Dank gilt ihm für die stete Erreichbarkeit und die schnellen Rückmeldungen während der Ausarbeitung.

Als Organistin hat mich die formale Parallele zwischen der mathematischen Präzision und den polyphonen Strukturen der Musik bei der Auseinandersetzung mit diesem Thema besonders fasziniert.

Ebenso danke ich Herrn Dr. Kerner für die Übernahme des Zweitgutachtens.

1 Einleitung

„denn wollten wir die Körper teilen in eine endliche Anzahl von Teilen, so ist es unzweifelhaft, dass wir sie nicht zusammensetzen könnten zu Körpern, die mehr Raum einnehmen als früher...“

Dieses Zitat ist aus Galileo Galileis Werk *„Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze“* (zitiert nach [Els18], S. 5). Es spiegelt das intuitive Verständnis wider, dass das Volumen eines Objekts bei einer Zerlegung in endlich viele Stücke und deren anschließender Neuzusammensetzung durch starre Bewegungen invariant bleiben muss.

Die Mathematik des frühen 20. Jahrhunderts stellte diese Gewissheit jedoch radikal infrage. Mit der Entwicklung der Maßtheorie durch Henri Lebesgue entstand die Notwendigkeit, jeder Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ein Maß zuzuordnen. Giuseppe Vitali lieferte im Jahr 1905 mit der Konstruktion der nach ihm benannten Vitali-Menge den ersten Beweis für die Existenz von Mengen, denen im Rahmen des Lebesgue-Maßes kein sinnvoller Inhalt zugeordnet werden kann. Die Existenz solcher nicht-messbarer Mengen ist untrennbar mit dem Auswahlaxiom verbunden und bildet das theoretische Fundament für Zerlegungen, die Galileis Postulat fundamental widersprechen.

Einen Höhepunkt dieser Entwicklung bildet der 1924 von Stefan Banach und Alfred Tarski bewiesene Satz, der heute als Banach-Tarski-Paradoxon bekannt ist. Dieser Satz zeigt, dass eine dreidimensionale Kugel in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegt werden kann, die sich allein durch Bewegungen zu zwei Kugeln zusammensetzen lassen, von denen jede identisch mit der ursprünglichen ist. Was Galilei für „unzweifelhaft“ unmöglich hielt, wird hier zur mathematischen Realität: Volumen lässt sich durch die geschickte Zerlegung in nicht-messbare Punktmengen vervielfachen ([Els18], S.5).

2 Das Auswahlaxiom

Für viele Resultate in dieser Arbeit spielen das Auswahlaxiom (AC), und einige weitere Sätze, die zu diesem äquivalent sind, eine wichtige Rolle. Während die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ZF) die meisten mathematischen Operationen abdeckt, führt erst die Hinzunahme des Auswahlaxioms (ZFC) zu der theoretischen Grundlage, auf der die Existenz nicht-messbarer Mengen und somit das Banach-Tarski-Paradoxon beruhen (vgl. [Els18], S.110 f.). Die Legitimation für die Verwendung des Auswahlaxioms stützt sich maßgeblich auf zwei fundamentale Resultate des 20. Jahrhunderts:

Zunächst zeigte Kurt Gödel im Jahr 1937 die relative Konsistenz des Auswahlaxioms: Er bewies, dass die Annahme von AC zu keinen logischen Widersprüchen führt, sofern das System ZF selbst widerspruchsfrei ist. Im Jahr 1963 vervollständigte Paul Cohen dieses Bild, indem er nachwies, dass auch die Negation des Auswahlaxioms nicht im Widerspruch zu den ZF -Axiomen steht (vgl. [Pet06], S.2). Dass die Nicht-Messbarkeit untrennbar an das Auswahlaxiom gebunden ist, verdeutlicht ein Resultat von Robert Solovay. Er konstruierte ein Modell der Mengenlehre (unter Verzicht auf AC), in dem jede Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ messbar ist (vgl. [Sol70], S.1), (sh. Ausblick). Dies zeigt, dass Paradoxien wie die von Banach und Tarski nicht etwa Fehler der Geometrie sind, sondern der logische Preis, der aus den Folgen des Auswahlaxioms zustande kommt.

Definition 2.1 (vgl. [Her06], S. 5). Das Auswahlaxiom besagt: Für jede Familie $(X_i)_{i \in I}$ nicht-leerer Mengen X_i ist das kartesische Produkt

$$\prod_{i \in I} X_i$$

nicht leer.

Es gibt äquivalente Formulierungen (vgl. [Ung26], S. 544):

1. **Das Lemma von Tukey:** Jede nichtleere Menge von endlichem Charakter besitzt ein bezüglich der Inklusion maximales Element.
2. **Das Hausdorff'sche Maximalitätsprinzip:** In jeder partiell geordneten Menge existiert eine maximale Kette (eine total geordnete Teilmenge).
3. **Das Lemma von Zorn:** Sei $(P, \leq)$ eine nichtleere partiell geordnete Menge. Wenn jede Kette in P eine obere Schranke in P besitzt, dann enthält P mindestens ein maximales Element.
4. **Der Wohlordnungssatz von Zermelo:** Jede Menge X kann wohlgeordnet werden, d.h. es existiert eine Totalordnung auf X , bei der jede nichtleere Teilmenge von X ein kleinstes Element besitzt.

In der vorliegenden Arbeit wird das Auswahlaxiom insbesondere aus folgenden Gründen gebraucht: Sowohl bei der Konstruktion von Vitali-Mengen als auch bei Banach-Tarski (Zerlegung der Sphäre nach der Wirkung freier Gruppen) müssen Repräsentanten aus einer überabzählbaren Menge von

Äquivalenzklassen gewählt werden. Ohne das Auswahlaxiom bricht der Beweisgang an dieser Stelle ab. Wir wollen als Beispiel insbesondere Nichtmessbarkeit von Hamel-Untergruppen zeigen, wo wir das Lemma von Zorn für die Existenz einer Hamelbasis voraussetzen, sowie den Wohlordnungssatz für den Beweis des sogenannten Bernstein-Monsters. Im letzten Kapitel wollen wir mittels des Satzes von Hahn-Banach, der das Lemma von Zorn voraussetzt, beweisen, dass das Banach-Tarski Paradoxon für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ nicht existiert.

Nun eine Veranschaulichung: Um aus unendlich vielen Paaren Schuhen jeweils den linken zu wählen, benötigt man kein Auswahlaxiom (man hat eine Regel). Um jedoch aus unendlich vielen Paaren Socken jeweils eine auszuwählen, ist man auf das Auswahlaxiom angewiesen, da die Socken ununterscheidbar sind ([Pet06], S. 1).

3 Vorbereitendes

Mengensysteme und ihre Hierarchie

Um die Existenz einer nicht-messbaren Menge (Vitali-Menge) zu beweisen, müssen wir die Struktur von Maßen, den Begriff der Messbarkeit und die Grenzen ihrer Fortsetzbarkeit präzise darstellen. Zuerst betrachten wir verschiedene Klassen von Teilmengen einer Grundmenge $M \neq \emptyset$. Die folgende Hierarchie führt von einfachen Intervallen hin zu σ -Algebren.

Definition 3.1 (Halbring, vgl. [Kir26], S.199). Ein Mengensystem $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt ein **Halbring**, wenn gilt:

1. Sind $A, B \in \mathcal{H}$, so gilt auch $A \cap B \in \mathcal{H}$ (Durchschnittsstabilität).
2. Sind $A, B \in \mathcal{H}$, dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{H}$, so dass

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^m C_i$$

Ringe erlauben zusätzlich die endliche Vereinigung von Mengen, was für die Additivität von Inhalten zentral ist.

Definition 3.2 (Ring, vgl. [Kir26], S.197). Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt ein **Ring**, wenn es gegenüber Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz abgeschlossen ist. Für alle $A, B \in \mathcal{R}$ gilt:

1. $A \cup B \in \mathcal{R}$
2. $A \setminus B \in \mathcal{R}$

Daraus folgt automatisch $A \cap B \in \mathcal{R}$ durch die Identität $A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

Für den Beweis des Vitali-Satzes und die Forderung der σ -Additivität ist der Übergang zu σ -Algebren notwendig.

Definition 3.3 (σ -Algebra, vgl. [Kir26], S. 251). Ein Mengensystem $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt eine **σ -Algebra** über M , wenn gilt:

1. $M \in \Sigma$.
2. $A \in \Sigma \implies M \setminus A \in \Sigma$
3. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in Σ , so gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

Definition 3.4 (Maß, vgl. [Kir26], S. 259). Sei $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra über einer Grundmenge M . Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt ein **Maß**, wenn sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1.

$$\mu(\emptyset) = 0. \quad (3.1)$$

2. Für alle Mengen $A \in \mathcal{A}$ ist der Funktionswert nichtnegativ:

$$\mu(A) \geq 0. \quad (3.2)$$

3. σ -Additivität: Für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ (d. h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$) gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad (3.3)$$

Definition 3.5 (Messraum und Maßraum, vgl. [Kir26], S. 260). 1. Ist $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf einer Grundmenge M , dann nennt man das geordnete Paar $(M, \mathcal{A})$ einen **Messraum**. Die Elemente von $\mathcal{A}$ werden als **messbare Mengen** bezeichnet.

2. Ist $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ ein auf $\mathcal{A}$ definiertes Maß, so bezeichnet man das Tripel $(M, \mathcal{A}, \mu)$ als einen **Maßraum**.

Satz 3.6 (Monotonie des Maßes). Sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für beliebige Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ gilt:

$$\mu(A) \leq \mu(B). \quad (3.4)$$

Falls zusätzlich $\mu(A) < \infty$ gilt, folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Beweis. Seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$. Wir können die Menge B als disjunkte Vereinigung von A und der Differenzmenge $B \setminus A$ darstellen:

$$B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{mit} \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset. \quad (3.5)$$

Da $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist, ist mit A und B auch die Differenzmenge $B \setminus A$ in $\mathcal{A}$ enthalten. Aufgrund der Additivität des Maßes gilt:

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A). \quad (3.6)$$

Da ein Maß nach Definition nur nichtnegative Werte annimmt, gilt $\mu(B \setminus A) \geq 0$. Daraus folgt unmittelbar $\mu(A) \leq \mu(B)$. $\square$

An dieser Stelle stellt sich die Frage, warum die Struktur eines Rings unzureichend ist und der Übergang zur σ -Algebra sowie zur σ -Additivität zwingend erforderlich wird. Während ein Ring lediglich den Abschluss unter *endlichen* Vereinigungen garantiert, verlangt die Analysis den Umgang mit Grenzprozessen. Erst die σ -Algebra erlaubt es, abzählbare Vereinigungen von Mengen konsistent zu behandeln.

Die Grundlage für die Konstruktion der Borel- σ -Algebra auf dem $\mathbb{R}^d$ bildet das System der halboffenen Intervalle bzw. Quader. Wir definieren den Halbring $\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$ wie folgt:

Beispiel 3.7 (Halbring der halboffenen Quader). Das System der links offenen und rechts abgeschlossenen Intervalle im $\mathbb{R}$ ist gegeben durch (vgl. [Kir26], S. 159):

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}) := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \quad (3.7)$$

Verallgemeinert auf den d -dimensionalen Raum $\mathbb{R}^d$ betrachten wir das System der halboffenen Quader $\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$, welches aus allen kartesischen Produkten solcher Intervalle besteht (vgl. [Kir26], S. 161):

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \prod_{i=1}^d (a_i, b_i] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i \right\}. \quad (3.8)$$

Dabei setzen wir $(a_i, a_i] = \emptyset$. Das System $\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$ bildet einen Halbring über $\mathbb{R}^d$.

Erläuterung zur Erzeugung der Borel- σ -Algebra

Die **Borel- σ -Algebra** $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist die kleinste σ -Algebra, die diesen Halbring $\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$ enthält (vgl. [Kir26], S. 256):

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)). \quad (3.9)$$

Eine Menge A heißt **Borel-messbar**, wenn $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Obwohl dieses System nur auf „einfachen“ Quadern basiert, kann man sogar zeigen, dass die von $\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$ erzeugte σ -Algebra identisch mit der von den offenen Mengen auf $\mathbb{R}^d$ erzeugten σ -Algebra ist (vgl. [Kir26]).

Nun zur Vereinfachung noch folgende Definition:

Definitionen zur Translations- und Bewegungsinvarianz $\mathbb{R}^d$

Definition 3.8 (Translation, vgl. [Kir26], S. 297). Eine Abbildung $\tau_v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt **Translation** (Verschiebung), wenn ein Vektor $v \in \mathbb{R}^d$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\tau_v(x) = x + v \quad (3.10)$$

Definition 3.9 (Translationsinvarianz, vgl. [Kir26], S. 298). Ein Maß μ auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ über dem $\mathbb{R}^d$ heißt **translationsinvariant**, wenn für jede messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ und jeden Verschiebungsvektor $v \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mu(A + v) = \mu(A) \quad (3.11)$$

wobei $A + v := \{x + v \mid x \in A\}$ die verschobene Menge bezeichnet.

Definition 3.10 (Bewegung, vgl. [Kir26], S. 302). Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt **Bewegung**, wenn ein Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und eine orthogonale Matrix L (d. h. $L^T L = I_d$) existieren, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$T(x) = Lx + x_0 \quad (3.12)$$

Definition 3.11 (Bewegungsinvarianz, vgl. [Kir26], S. 303). Ein Maß μ auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ über dem $\mathbb{R}^d$ heißt **bewegungsinvariant**, wenn für jede Bewegung T und jede messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(T(A)) = \mu(A). \quad (3.13)$$

Hierbei bezeichnet $T(A) := \{T(x) \mid x \in A\}$ das Bild von A unter der Abbildung T .

An dieser Stelle lässt sich festhalten, dass die oben definierten Bewegungen genau die Elemente der **Isometriegruppe** $\text{Isom}(\mathbb{R}^d)$ (vgl. [Kio26], S. 112) bilden. Diese Gruppe ist definiert als die Menge aller abstandserhaltenden Abbildungen:

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid d(f(u), f(v)) = d(u, v) \text{ für alle } u, v \in \mathbb{R}^d\}. \quad (3.14)$$

4 Die Unlösbarkeit des Maßproblems im $\mathbb{R}^d$ und die Existenz nicht messbarer Mengen

In Anlehnung an die Darstellung in [Els18] untersuchen wir die Frage, ob sich der elementargeometrische Volumenbegriff konsistent auf die gesamte Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ erweitern lässt.

Das Maßproblem

Das Maßproblem, das Lebesgue untersuchte, besteht in der Suche nach einer Abbildung (Maßfunktion) $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, die die folgenden drei intuitiv zugänglichen Forderungen für ein Volumen erfüllt (vgl. [Els18], S. 5):

1. **Bewegungsinvarianz:**

$$\forall \beta \in \text{Isom}(\mathbb{R}^d), \forall A \subseteq \mathbb{R}^d : \mu(\beta(A)) = \mu(A) \quad (4.1)$$

2. **σ -Additivität:** Für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad (4.2)$$

3. **Normierung:** Für den d -dimensionalen Einheitswürfel $[0, 1]^d$ gilt:

$$\mu([0, 1]^d) = 1. \quad (4.3)$$

Im Folgenden wird nachgewiesen, dass es Teilmengen der reellen Zahlen gibt, die nicht messbar sind im Sinne der drei Forderungen an die obige Maßfunktion, also das Maßproblem auf nicht ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ gelöst werden kann, was Vitali zeigen konnte. Dieser Beweis ist fundamental, da er die Notwendigkeit aufzeigt, die Maßtheorie auf σ -Algebren zu beschränken, anstatt die gesamte Potenzmenge zu betrachten.

Satz 4.1. *Das Maßproblem ist unlösbar (vgl. [Els18], S.5).*

Beweis. Der Beweis erfolgt zunächst durch die Konstruktion einer sogenannten *Vitali-Menge* für den Fall $d = 1$.

Wir definieren eine Relation auf $\mathbb{R}$: Zwei Zahlen x, y heißen äquivalent ($x \sim_{\mathbb{Q}} y$), wenn ihre Differenz rational ist ($x - y \in \mathbb{Q}$). Diese Relation unterteilt $\mathbb{R}$ in Äquivalenzklassen

$$Q_x = \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\}. \quad (4.4)$$

Es ist leicht zu zeigen, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation definiert.

Es gilt:

$$Q_x \cap [0, 1] \neq \emptyset \quad (4.5)$$

Dazu sei ein festes $x \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Wir definieren $q_x := -\lfloor x \rfloor$. Wegen $x + q_x = x - \lfloor x \rfloor$ folgt, dass $x + q_x$ im halboffenen Intervall $[0, 1)$ liegt. Es ist damit gezeigt, dass Q_x^* für jedes reelle x nicht leer ist.

Unter Anwendung des Auswahlaxioms wählen wir für jede Äquivalenzklasse Q_x genau ein $x_e \in [0, 1]$. Die Menge dieser Repräsentanten nennen wir M .

Es gelten folgende Eigenschaften:

1. Für zwei verschiedene rationale Zahlen $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$ mit $y_1 \neq y_2$ sind die translierten Mengen $\tau_{y_1} M$ und $\tau_{y_2} M$ disjunkt.

2. Das Einheitsintervall $[0, 1]$ wird durch die Vereinigung der rationalen Translationen von M überdeckt, wobei die gesamte Vereinigung im Intervall $[-1, 2]$ enthalten bleibt:

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{y \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \tau_y M \subseteq [-1, 2]. \quad (4.6)$$

Zu 1. Wir nehmen an, es existiere ein Element x , das im Schnitt der beiden verschobenen Mengen liegt, also $x \in \tau_{y_1} M \cap \tau_{y_2} M$. Nach Definition der Translation bedeutet dies, dass es zwei Elemente $x_1, x_2 \in M$ geben muss, für die gilt:

$$(x = y_1 + x_1 \quad \text{und} \quad x = y_2 + x_2) \implies x_1 - x_2 = y_2 - y_1. \quad (4.7)$$

Da sowohl y_1 als auch y_2 rationale Zahlen sind, ist deren Differenz ebenfalls rational ($y_2 - y_1 \in \mathbb{Q}$). Dies impliziert nach der Äquivalenzrelation, dass

$$Q_{x_1} = Q_{x_2}. \quad (4.8)$$

gilt. Da die Menge M jedoch per Konstruktion aus jeder Äquivalenzklasse exakt nur ein einziges Element enthält, folgt aus dieser Gleichheit sofort:

$$x_1 = x_2. \quad (4.9)$$

Wegen $y_1 + x_1 = y_2 + x_2$ folgt $y_1 = y_2$. Dies steht jedoch im direkten Widerspruch zu unserer Voraussetzung, dass y_1 und y_2 verschieden sind. Somit muss der Schnitt leer sein.

Zu 2. Zunächst beweisen wir die rechte Inklusion. Da $M \subseteq [0, 1]$ gilt und wir nur Translationen y aus dem Intervall $[-1, 1]$ betrachten, folgt für jedes Element $z = y + m$ aus der Vereinigung:

$$-1 + 0 \leq y + m \leq 1 + 1 \implies z \in [-1, 2]. \quad (4.10)$$

Nun zur linken Inklusion: Sei dazu ein beliebiges $x \in [0, 1]$ gegeben. Es existiert zu jeder reellen Zahl ein Repräsentant z in M . Daraus folgt:

$$y := x - z \in \mathbb{Q}. \quad (4.11)$$

und

$$-1 \leq x - z \leq 1 \implies y \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]. \quad (4.12)$$

Wir können x nun umschreiben als:

$$x = y + z \quad \text{mit } y \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \text{ und } z \in M. \quad (4.13)$$

Dies bedeutet $x \in \tau_y M$, womit jedes $x \in [0, 1]$ in der Vereinigung enthalten ist.

Wir führen nun einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, M sei messbar mit $\mu(M) \in [0, \infty]$. Aus der Translationsinvarianz folgt für alle Verschiebungen $\mu(\tau_q M) = \mu(M)$. Es gilt mit der Monotonie des Maßes: Zur Vereinfachung definiere $Q^* := \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.

$$\mu([0, 1]) \leq \mu\left(\bigcup_{q \in Q^*} \tau_q M\right) \leq \mu([-1, 2]) \quad (4.14)$$

Es folgt:

$$1 \leq \mu\left(\bigcup_{q \in Q^*} \tau_q M\right) \leq 3. \quad (4.15)$$

Da die Mengen $\tau_q M$ disjunkt sind und die Indexmenge Q^* abzählbar ist, erlaubt uns die σ -Additivität die Umformung:

$$\mu\left(\bigcup_{q \in Q^*} \tau_q M\right) = \sum_{q \in Q^*} \mu(\tau_q M) = \sum_{q \in Q^*} \mu(M). \quad (4.16)$$

Nun ergeben sich zwei logische Sackgassen:

1. Wäre $\mu(M) = 0$, so wäre die gesamte Summe 0. Dann stünde dort $1 \leq 0$, was falsch ist.
2. Wäre $\mu(M) > 0$, so wäre die Summe über unendlich viele (abzählbare) positive Werte gleich ∞ . Dann stünde dort $\infty \leq 3$, was ebenfalls falsch ist.

Da beide Fälle für den Wert von $\mu(M)$ zu einem Widerspruch führen, kann die Menge M nicht messbar sein.

Die Nicht-Existenz einer Maßfunktion μ_d für beliebige Dimensionen $d > 1$ lässt sich nun durch eine Reduktion auf den eindimensionalen Fall zeigen. Angenommen, es existiere für ein festes $d > 1$ eine Abbildung $\mu_d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, welche die Axiome der Translationsinvarianz, der σ -Additivität und der Normierung erfüllt.

Wir definieren nun eine induzierte Abbildung $\mu_1 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ für den eindimensionalen Fall durch:

$$\mu_1(A) := \mu_d(A \times [0, 1]^{d-1}) \quad \text{für alle } A \subseteq \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Da μ_d nach Voraussetzung auf der gesamten Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ definiert ist, ist μ_1 eine wohldefinierte Abbildung auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Wir weisen nach, dass μ_1 die drei Forderungen des Maßproblems für $d = 1$ erfüllt:

1. **Translationsinvarianz:** Sei $x \in \mathbb{R}$ und $A \subseteq \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mu_1(x + A) &= \mu_d((x + A) \times [0, 1]^{d-1}) \\ &= \mu_d(\{(x + a, y_2, \dots, y_d) \mid a \in A, y_i \in [0, 1]\}) \\ &= \mu_d((x, 0, \dots, 0) + (A \times [0, 1]^{d-1})). \end{aligned}$$

Aufgrund der angenommenen Translationsinvarianz von μ_d folgt:

$$\mu_1(x + A) = \mu_d(A \times [0, 1]^{d-1}) = \mu_1(A).$$

2. **σ -Additivität:** Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann sind auch die Zylindermengen $Z_n := A_n \times [0, 1]^{d-1}$ paarweise disjunkt im $\mathbb{R}^d$. Aus der σ -Additivität von μ_d folgt:

$$\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu_d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_d(Z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n). \quad (4.18)$$

3. **Normierung:** Für das Einheitsintervall $[0, 1]$ ergibt sich:

$$\mu_1([0, 1]) = \mu_d([0, 1] \times [0, 1]^{d-1}) = \mu_d([0, 1]^d) = 1. \quad (4.19)$$

Die konstruierte Funktion μ_1 erfüllt somit alle Bedingungen einer Lösung des Maßproblems für $d = 1$. Dies steht jedoch im direkten Widerspruch zu dem zuvor erbrachten Nachweis, dass eine solche Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ nicht existieren kann.

Folglich muss die Annahme, es existiere ein solches Maß μ_d für $d > 1$ verworfen werden. Das Maßproblem ist somit für kein $d \geq 1$ auf der Potenzmenge lösbar und die Menge $M \times [0, 1]^{d-1}$ ist ein Beispiel einer nicht messbaren Menge im $\mathbb{R}^d$. (Die Beweisidee ist aus [Kir26], S. 303 ff.) $\square$

Einordnung der Vitali-Menge

Um die Sonderstellung der Vitali-Menge präzise einzuordnen, müssen wir zwei zentrale Konzepte der Messbarkeit auf dem $\mathbb{R}^d$ unterscheiden. Während die Borel-Messbarkeit rein topologisch motiviert ist, entspringt die Lebesgue-Messbarkeit dem Wunsch nach einem vollständigen Maßraum (vgl. [Kir26], S. 290).

Das äußere Maß nach Carathéodory

Da das Ziel eine Abbildung auf der gesamten Potenzmenge ist, definieren wir zunächst das äußere Maß.

Definition 4.2 (Äußeres Maß, (vgl. [Kir26], S. 271)). Sei X eine Grundmenge. Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ heißt äußeres Maß, falls gilt:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie)
3. $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ (σ -Subadditivität)

Definition 4.3 (Äußeres Lebesgue-Maß, vgl. [Kir26], S. 271 f.). Für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ist das **äußere Lebesgue-Maß** $\lambda^*(A)$ definiert als das Infimum der Summe der Volumina aller abzählbaren Überdeckungen von A durch Quader $I_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$, wobei das Volumen für Quader $I = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i]$ durch das Produkt der Kantenlängen $\lambda(I) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ gegeben ist.

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^d) \right\} \quad (4.20)$$

Das äußere Lebesgue-Maß ist auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ definiert und erfüllt die Eigenschaften der Definition des äußeren Maßes von 4.2, daher der Name. Es ist jedoch im Allgemeinen kein Maß. Ein Maß (das sog. Lebesgue-Maß λ_d) ist es für diejenigen Mengen, für die das folgende **Carathéodory-Kriterium** erfüllt ist, welches die additive Trennbarkeit beliebiger Testmengen fordert:

Definition 4.4 (Lebesgue-Messbarkeit, vgl. [Els18], S. 55). Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **Lebesgue-messbar**, wenn für jede Testmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\lambda^*(Q) = \lambda^*(Q \cap A) + \lambda^*(Q \cap A^c) \quad (4.21)$$

Diese Mengen bilden eine σ -**Algebra**, bezeichnet mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ und es gilt $\lambda^*(A) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Hierarchie und die Nicht-Messbarkeit von M

Es lässt sich zeigen, dass jede Borel-Menge auch das Carathéodory-Kriterium erfüllt. Es gilt die Inklusionskette (vgl. [Els18], S. 60):

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \quad (4.22)$$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ist dabei die *Vervollständigung* von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Satz 4.5 (Einordnung der Vitali-Menge). *Für die im vorigen Abschnitt konstruierte Vitali-Menge M gilt:*

$$M \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und folglich} \quad M \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (4.23)$$

Beweis. Da λ^* eingeschränkt auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ein bewegungsinvariantes, σ -additives Maß mit $\lambda^*([0, 1]^d) = 1$ ist (vgl. [Kir26], S. 303), würde die Annahme $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ zu dem im vorigen Abschnitt hergeleiteten Widerspruch führen. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, kann M auch keine Borel-Menge sein. $\square$

Satz 4.6. *Die Mächtigkeit der Familie aller Vitali-Mengen beträgt $2^{2^{\aleph_0}}$ (vgl. [Her06], S. 120).*

Beweis. Jede Äquivalenzklasse $Q_x = \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ ist eine Translation der abzählbaren Menge der rationalen Zahlen. Daher gilt für ihre Mächtigkeit $|Q_x| = \aleph_0$.

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist die disjunkte Vereinigung dieser Äquivalenzklassen. Sei K die Menge aller Äquivalenzklassen und $\kappa = |K|$ deren Mächtigkeit. Es gilt somit:

$$\kappa \cdot \aleph_0 = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$$

Da $2^{\aleph_0}$ eine überabzählbare Kardinalzahl ist, folgt nach den Regeln der Kardinalzahlarithmetik, dass $\kappa = 2^{\aleph_0}$ gilt.

Eine Vitali-Menge entsteht durch die Wahl genau eines Repräsentanten aus jeder der κ Klassen. Da für jede der $2^{\aleph_0}$ Klassen jeweils $\aleph_0$ Wahlmöglichkeiten bestehen, ergibt sich für die Mächtigkeit $\mathcal{M}$ der Familie aller Vitali-Mengen:

$$\mathcal{M} = \aleph_0^{(2^{\aleph_0})}$$

Unter Anwendung der Kardinalzahlarithmetik, speziell der Regel $\lambda^\mu = 2^\mu$ für $2 \leq \lambda \leq 2^\mu$, ergibt sich mit $\lambda = \aleph_0$ und $\mu = 2^{\aleph_0}$:

$$\mathcal{M} = 2^{(2^{\aleph_0})}$$

Dies entspricht der Mächtigkeit der Potenzmenge der reellen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. □

4.1 Weitere nicht messbare Mengen

Der folgende Satz stellt eine Verallgemeinerung der Vitali-Konstruktion dar. Er zeigt, dass die Unlösbarkeit des Maßproblems nicht an der speziellen Wahl der rationalen Zahlen liegt, sondern eine fundamentale Eigenschaft des $\mathbb{R}^d$ und seiner additiven Struktur ist. Dazu erinnern wir zunächst an folgendes Lemma:

Lemma 4.7 (Folgenkriterium für Dichtheit, vgl. [MKL26], S. 17). *Sei X ein metrischer Raum (hier der $\mathbb{R}^d$) und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *A ist dicht in X (d. h. der Abschluss $\overline{A}$ entspricht X).*
2. *Für jeden Punkt $x_0 \in X$ existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.*

Satz 4.8 (Verallgemeinerung, (vgl. [Els18], S. 109)). *Sei G eine abzählbare, dichte, additive Untergruppe des $\mathbb{R}^d$ und M ein Repräsentantensystem der Faktorgruppe $\mathbb{R}^d/G$. Ferner sei $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein bezüglich G translationsinvariantes Maß auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{R}^d$, wobei $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{A}$ gilt und μ auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ mit dem Lebesgue-Maß λ übereinstimmt ($\mu|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} = \lambda$). Dann ist*

$$M \notin \mathcal{A}. \tag{4.24}$$

Für jedes $A \subseteq M$, $A \in \mathcal{A}$ muss notwendig $\mu(A) = 0$ gelten.

Beweis. Wir wollen einen Widerspruch herleiten. Angenommen, das Repräsentantensystem M sei messbar, d. h. $M \in \mathcal{A}$.

Da G eine dichte Untergruppe des $\mathbb{R}^d$ ist, folgt nach dem Folgenkriterium für Dichtheit, dass der von G

aufgespannte lineare Raum gesamt $\mathbb{R}^d$ sein muss. Würde G in einem echten Unterraum liegen, könnte G nicht dicht sein. Somit existiert eine Basis $\{g_1, \dots, g_d\} \subseteq G$ des $\mathbb{R}^d$. Wir definieren das Gitter Γ und das Fundamentalparallelotop P :

$$\Gamma := \bigoplus_{j=1}^d \mathbb{Z}g_j = \left\{ \sum_{j=1}^d n_j g_j : n_j \in \mathbb{Z} \right\}, \quad P := \left\{ \sum_{j=1}^d \lambda_j g_j : 0 \leq \lambda_j < 1 \right\} \quad (4.25)$$

Da P ein beschränkter d -dimensionaler Quader (im Sinne der Basis g_i) ist, gilt $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{A}$ und für das Maß gilt $0 < \mu(P) = \lambda(P) < \infty$.

Nun zur Konstruktion eines Repräsentantensystems $L \subseteq P$: Wir nutzen die Eigenschaft, dass die Familie $\{\gamma + P : \gamma \in \Gamma\}$ eine disjunkte Überdeckung des $\mathbb{R}^d$ bildet und definieren:

$$L := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (-\gamma + (M \cap (\gamma + P))) \quad (4.26)$$

Da nach Annahme $M \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ gegenüber Abzählung, Schnitt und Translation unter G (und damit $\Gamma \subseteq G$) abgeschlossen ist, folgt $L \in \mathcal{A}$.

Behauptung: L ist ebenfalls ein Repräsentantensystem von $\mathbb{R}^d/G$ mit $L \subseteq P$.

Zunächst zur **Existenz**: Sei $x \in \mathbb{R}^d$ ein beliebiger Punkt. Da M nach Voraussetzung ein Repräsentantensystem ist, existiert in M genau ein Element m , welches dieselbe Äquivalenzklasse wie x repräsentiert ($m \sim x$). Da die verschobenen Parallelotope $\{\gamma + P : \gamma \in \Gamma\}$ den gesamten Raum $\mathbb{R}^d$ überdecken, lässt sich dieses m eindeutig einem Gitter-Kasten $\gamma_0 + P$ zuordnen. Nach der Definition von L ist der verschobene Punkt $l := m - \gamma_0$ ein Element von L . Da der Gitterpunkt γ_0 ein Element der Untergruppe G ist, gilt $l \sim m$ und damit aufgrund der Transitivität der Äquivalenzrelation auch $l \sim x$. Somit ist jede Äquivalenzklasse in L vertreten.

Zur **Eindeutigkeit**: Angenommen, es würde zwei Elemente $l_1, l_2 \in L$ geben, die zur selben Äquivalenzklasse gehören ($l_1 \sim l_2$). Gemäß der Konstruktion von L existieren dann Elemente $m_1, m_2 \in M$ und Gitterpunkte $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, sodass $l_1 = m_1 - \gamma_1$ und $l_2 = m_2 - \gamma_2$ gilt. Aus der Äquivalenz $l_1 \sim l_2$ folgt unmittelbar, dass auch die Differenz $m_1 - m_2 = (l_1 + \gamma_1) - (l_2 + \gamma_2)$ in der Gruppe G liegen muss, da sowohl die Differenz der Repräsentanten als auch die Gittervektoren Elemente von G sind. Dies impliziert $m_1 \sim m_2$. Da M jedoch ein Repräsentantensystem ist und pro Klasse definitionsgemäß nur ein einziges Element enthalten darf, erzwingt dies $m_1 = m_2$. Da die Familie der verschobenen Parallelotope $\{\gamma + P : \gamma \in \Gamma\}$ nach Konstruktion eine disjunkte Zerlegung des $\mathbb{R}^d$ bildet, ist die Zuordnung jedes Punktes zu einem Parallelotop eindeutig, woraus $\gamma_1 = \gamma_2$ und schließlich $l_1 = l_2$ folgt.

Damit ist bewiesen, dass L ein Repräsentantensystem der Faktorgruppe $\mathbb{R}^d/G$ ist, welches im Gegensatz zum ursprünglichen System M vollständig im beschränkten Parallelotop P enthalten ist ($L \subseteq P$).

Da L ein Repräsentantensystem ist, gilt $\mathbb{R}^d = \bigcup_{g \in G} (g + L)$, wobei die Mengen paarweise disjunkt sind. Aufgrund der σ -Additivität und der G -Translationsinvarianz von μ folgt:

$$\infty = \mu(\mathbb{R}^d) = \mu \left(\bigcup_{g \in G} (g + L) \right) = \sum_{g \in G} \mu(g + L) = \sum_{g \in G} \mu(L) \quad (4.27)$$

Diese Gleichung $\infty = \sum_{g \in G} \mu(L)$ kann nur erfüllt sein, wenn $\mu(L) > 0$ gilt.

Wir betrachten nun die Menge $G_P := G \cap P$. Da G dicht ist, enthält jedes offene Intervall in P unendlich viele Punkte aus G , also ist G_P eine abzählbar unendliche Menge. Für alle $g \in G_P$ und $l \in L \subseteq P$ gilt für die Summe $g + l \in P + P$. Definieren wir $2P := \{x + y : x, y \in P\}$, so ist dies eine beschränkte Menge mit endlichem Lebesgue-Maß. Es gilt:

$$\bigcup_{g \in G_P} (g + L) \subseteq 2P \implies \mu \left(\bigcup_{g \in G_P} (g + L) \right) \leq \mu(2P) < \infty \quad (4.28)$$

Wiederum unter Nutzung der σ -Additivität und Invarianz folgt:

$$\sum_{g \in G_P} \mu(L) \leq \mu(2P) < \infty \quad (4.29)$$

Da G_P unendlich viele Summanden hat, erzwingt diese endliche Schranke $\mu(L) = 0$.

Die Annahme $M \in \mathcal{A}$ führt simultan zu $\mu(L) > 0$ und $\mu(L) = 0$, was ein logischer Widerspruch ist. Somit ist $M \notin \mathcal{A}$. Für $A \subseteq M$ und $A \in \mathcal{A}$ bildet man zunächst

$$L_A := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (-\gamma + (A \cap (\gamma + P))) \quad (4.30)$$

und es folgt analog

$$\bigcup_{g \in G_P} (g + L_A) \subseteq 2P \quad \text{und} \quad \sum_{g \in G_P} \mu(L_A) \leq \mu(2P) < \infty \quad (4.31)$$

Mit derselben Argumentation wie für das Repräsentantensystem M folgt, dass nicht $\mu(A) > 0$ gelten kann. $\square$

In der Standard-Konstruktion von Giuseppe Vitali wählt man aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten aus. Es stellt sich nun die Frage, was geschieht, wenn die Auswahlfunktion mehrere Punkte aus derselben Äquivalenzklasse wählt:

Definition 4.9 (Erweiterte Vitali-Menge, vgl. [BPV23], S. 776). Gegeben sei $a > 0$ und $X \subseteq [-a, a] \subseteq \mathbb{R}$ und die Äquivalenzrelation $x \sim_{\mathbb{Q}} y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Für eine Auswahlfunktion f definieren wir die Menge V_f als die Vereinigung der gewählten Repräsentanten:

$$V_f = \bigcup_{[x] \in X/\sim} f([x]). \quad (4.32)$$

Wir betrachten dazu die Familie $\mathcal{V}_{fin}$, bei der für jede Klasse $[x]$ die Menge $f([x])$ eine endliche Mächtigkeit besitzt.

Im nächsten Schritt wollen wir beweisen, dass sogar jedes $V^f \in \mathcal{V}_{fin}$ auch nicht Lebesgue-messbar ist, für den Beweis aber zuerst einige Vorbereitung:

Lemma 4.10. (vgl. [Els18], S. 73f.) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Menge O und eine abgeschlossene Menge F mit $F \subseteq A \subseteq O$, sodass gilt:

$$\lambda(O \setminus A) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad \lambda(A \setminus F) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.33)$$

Insbesondere folgt daraus $\lambda(O \setminus F) < \epsilon$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $\lambda(A) < \infty$. Nach der Definition des äußeren Maßes existiert eine Überdeckung von A durch eine Folge von Intervallen $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, für die gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \lambda(A) + \frac{\epsilon}{4}. \quad (4.34)$$

Um eine offene Menge zu erhalten, wählen wir zu jedem Intervall I_n ein offenes Intervall I'_n mit $I_n \subseteq I'_n$, sodass gilt:

$$\lambda(I'_n) < \lambda(I_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}. \quad (4.35)$$

Definieren wir $O := \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n$, so ist O als Vereinigung offener Mengen offen. Aus der σ -Subadditivität von λ folgt:

$$\begin{aligned} \lambda(O) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I'_n) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda(I_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+2}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) + \frac{\epsilon}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &\leq \lambda(A) + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \lambda(A) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Da $\lambda(A) < \infty$ vorausgesetzt wurde, ergibt sich $\lambda_d(O \setminus A) = \lambda_d(O) - \lambda_d(A) < \frac{\epsilon}{2}$. Sei nun $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda(A) = \infty$.

Zur Konstruktion von O definieren wir eine Folge von beschränkten Mengen E_n , die den $\mathbb{R}^d$ ausschöpfen, beispielsweise durch die halboffenen Intervalle:

$$E_n = (-n, n]^d, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.37)$$

Offensichtlich gilt $\lambda(E_n) < \infty$. Wir setzen $A_n := A \cap E_n$. Da $A_n \subseteq E_n$ gilt, ist auch $\lambda(A_n) < \infty$. Nach dem bereits bewiesenen Fall existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine offene Menge O_n mit $A_n \subseteq O_n$, sodass gilt:

$$\lambda(O_n \setminus A_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}. \quad (4.38)$$

Wir definieren nun $O := \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$. Es gilt:

$$A = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n = O. \quad (4.39)$$

Für die Differenzmenge $O \setminus A$ erhalten wir unter Ausnutzung der σ -Subadditivität des Lebesgue-Maßes:

$$\begin{aligned} \lambda(O \setminus A) &= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &\leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n \setminus A_n)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(O_n \setminus A_n) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Damit ist die Existenz einer offenen Obermenge O für beliebiges $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ bewiesen. Der Teil für die abgeschlossene Menge folgt dann analog über die Komplementbildung:

Da $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ messbar ist, ist auch das Komplement A^c messbar. Es gibt eine offene Menge G mit $A^c \subseteq G$, sodass gilt:

$$\lambda(G \setminus A^c) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.41)$$

Setzen wir $F := G^c$, so ist F abgeschlossen mit $F \subseteq A$. Da die Mengenidentität $G \setminus A^c = A \setminus F$ erfüllt ist, folgt:

$$\lambda(A \setminus F) = \lambda(G \setminus A^c) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.42)$$

Die Kombination beider Abschätzungen liefert $\lambda(O \setminus F) = \lambda(O \setminus A) + \lambda(A \setminus F) < \epsilon$. $\square$

Korollar 4.11 (vgl. [Els18], S. 74). *Für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ gilt:*

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\} \quad (4.43)$$

Beweis. Es gelten die Gleichungen:

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(O) : O \supseteq A, O \text{ offen}\} \quad (4.44)$$

$$= \sup\{\lambda(F) : F \subseteq A, F \text{ abgeschlossen}\} \quad (4.45)$$

$$= \sup\{\lambda(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\} \quad (4.46)$$

Die ersten beiden Gleichheiten folgen aus Lemma 4.10. Zum Nachweis der dritten Identität betrachten wir den Fall $\lambda(A) > 0$, für $\lambda(A) = 0$ ist die Aussage trivial, da die leere Menge kompakt ist.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig mit $\alpha < \lambda(A)$. Aufgrund der zweiten Gleichung existiert eine abgeschlossene Menge $F \subseteq A$ mit:

$$\lambda(F) > \alpha. \quad (4.47)$$

Um von der abgeschlossenen Menge zur kompakten Menge überzugehen, definieren wir:

$$K_n := F \cap [-n, n]^d, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.48)$$

Da K_n abgeschlossen und beschränkt ist, ist K_n nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. Da die Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen F konvergiert ($K_n \uparrow F$), folgt aus der Stetigkeit des Maßes von unten (vgl. [Els18], S. 34):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(K_n) = \lambda(F). \quad (4.49)$$

Wegen $\lambda(F) > \alpha$ existiert somit ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, für den gilt:

$$\lambda(K_{n_0}) > \alpha. \quad (4.50)$$

Da K_{n_0} eine kompakte Teilmenge von A ist und α beliebig nahe an $\lambda(A)$ gewählt werden kann, folgt:

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}. \quad (4.51)$$

□

Definition 4.12 (Polnischer Raum, vgl. [Coh13], S. 239). Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **polnischer Raum**, wenn er die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

1. X separabel
2. Es existiert eine Metrik d , die die Topologie τ erzeugt, sodass der metrische Raum (X, d) vollständig ist.

Lemma 4.13. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist der Produktraum $K \times K$ ein polnischer Raum.*

Beweis. Da K kompakt ist, ist K insbesondere abgeschlossen und somit ein vollständiger metrischer Raum. Das kartesische Produkt $K \times K$ ist mit der Produktmetrik (induziert durch die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$) ebenfalls vollständig. Da $\mathbb{R}$ separabel ist (mit $\mathbb{Q}$ als abzählbarer dichter Teilmenge), ist auch jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ in der induzierten Metrik separabel. Folglich ist K separabel. Da das Produkt zweier separabler Räume wieder separabel ist, folgt die Separabilität für $K \times K$. Da $K \times K$ sowohl vollständig metrisierbar als auch separabel ist, handelt es sich um einen polnischen Raum. □

Definition 4.14 (Analytische Menge, vgl. [Coh13], S. 248). Sei X ein polnischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **analytisch**, wenn sie das Bild einer stetigen Funktion ist, die auf einem polnischen Raum definiert ist.

Satz 4.15 (Lebesgue-Messbarkeit analytischer Mengen, vgl. [Coh13], S. 262, spezialisiert auf Lebesgue-Messbarkeit). *Jede analytische Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar*

Lemma 4.16. *Jede Borel-Teilmenge eines polnischen Raumes ist das Bild eines polnischen Raumes unter einer stetigen und injektiven Abbildung (vgl. [Coh13], S. 251).*

Nun zur Nichtmessbarkeit einiger erweiterter Vitali-Mengen:

Satz 4.17. *Jede erweiterte Vitali-Menge $V_f \in \mathcal{V}_{fin}$ ist nicht Lebesgue-messbar (vgl. [BPV23], S. 776f.)*

Beweis. Wieder nehmen wir an, dass $V_f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Weil V_f per Definition mindestens ein Element jeder Äquivalenzklasse aus X enthält, existiert eine Vitali-Menge V_1 (wie in Satz 4 konstruiert) mit $V_1 \subseteq V_f$. Da V_1 nicht messbar ist, kann V_f aufgrund der Vollständigkeit des Maßes keine Lebesgue-Nullmenge sein. Es gilt also $\lambda(V_f) > 0$. Wegen Korollar 4.11 existiert zu der messbaren Menge V_f eine kompakte Teilmenge $K \subseteq V_f$ mit:

$$\lambda(K) > 0. \quad (4.52)$$

Wir definieren die Menge $A \subseteq K$ als jene Punkte, die innerhalb von K ein strikt größeres rationales Element in derselben Äquivalenzklasse besitzen:

$$A = \{x \in K : \exists y \in K \text{ mit } x < y \text{ und } x - y \in \mathbb{Q}\}. \quad (4.53)$$

Betrachte die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = y - x$ und die Menge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\}$.

Aufgrund der Stetigkeit von g ist das Urbild für einen festen Wert $q \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$

$$B_q := g^{-1}(\{q\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = q\} \quad (4.54)$$

eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Jede abgeschlossene Menge ist per Definition ein Element der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Die Menge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\}$ lässt sich durch

$$B = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)} B_q. \quad (4.55)$$

darstellen. Da die σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definitionsgemäß stabil unter abzählbaren Vereinigungen ist, folgt $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Da K kompakt ist, ist auch $B \cap (K \times K)$ eine Borel-Menge. Um die Messbarkeit von A nachzuweisen, nutzen wir die Tatsache, dass A analytisch ist.

Denn: Da B_1 nach Voraussetzung eine Borel-Teilmenge des polnischen Raumes $K \times K$ (vgl. 4.13) ist, garantiert Lemma 4.16, dass ein polnischer Raum Z und eine stetige Abbildung $g : Z \rightarrow K \times K$ existieren, für die $g(Z) = B_1$ gilt. Die Projektion $P_K : K \times K \rightarrow K$ auf die erste Komponente ist als Standardprojektion stetig. Folglich lässt sich die Menge A über die Komposition $A = P_K(B_1) = (P_K \circ g)(Z)$ als stetiges Bild des polnischen Raumes Z schreiben, was ihre Analytizität und damit

die Lebesgue-Messbarkeit nach Satz 4.15 beweist. Daraus folgt, dass $K \setminus A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ messbar ist. Da $f([x])$ für jedes $[x]$ endlich ist, besitzt jede Äquivalenzklasse innerhalb der kompakten Menge K ein Maximum. Sei $\{r_p : p \in \mathbb{N}\} = [-a, 0] \cap \mathbb{Q}$. Wir definieren:

$$K_p = (K \setminus A) + r_p. \quad (4.56)$$

Diese Mengen sind paarweise disjunkt. Angenommen, es gäbe $x \in K_{p_1} \cap K_{p_2}$ für $p_1 \neq p_2$. Dann würde $x = y_1 + r_{p_1} = y_2 + r_{p_2}$ mit $y_1, y_2 \in K \setminus A$ gelten. Dies impliziert $y_1 \sim y_2$. Da jedoch y_1 und y_2 beide Maxima ihrer Klasse in K sein müssen, folgt $y_1 = y_2$ und somit $r_{p_1} = r_{p_2}$, was im Widerspruch zu $p_1 \neq p_2$ steht. Weil jedes $x \in K$ ein zugehöriges Maximum $y \in K \setminus A$ in seiner Äquivalenzklasse besitzt und $x - y \in \mathbb{Q}$ beschränkt ist, gilt $K \subseteq \bigcup_{p \in \mathbb{N}} K_p$. Aus der Monotonie und der Translationsinvarianz des Maßes folgt:

$$0 < \lambda(K) \leq \lambda\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} K_p\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda(K \setminus A). \quad (4.57)$$

Daraus folgt notwendig $\lambda(K \setminus A) > 0$. Da jedoch $K \subseteq [-a, a]$ und $r_p \in [-a, 0]$, gilt:

$$\bigcup_{p \in \mathbb{N}} K_p \subseteq [-2a, a]. \quad (4.58)$$

Das Maß der Vereinigung muss also kleiner oder gleich $\lambda([-2a, a]) = 3a$ sein. Eine unendliche Summe identischer positiver Werte ist jedoch divergent, was im Widerspruch zur Beschränktheit des Intervalls steht. Damit ist V_f nicht messbar. $\square$

Es liegt nahe, diese Konstruktion auf allgemeinere Mengenklassen zu erweitern, die ebenfalls die Existenz eines Maximums garantieren. Da jede endliche Teilmenge reeller Zahlen kompakt ist, bildet die Familie $\mathcal{V}_{fin}$ lediglich einen Spezialfall der im Folgenden betrachteten Familie $\mathcal{V}_{comp}$. Das nächste Theorem zeigt, dass die Eigenschaft der Kompaktheit ausreicht, um die Nichtmessbarkeit zu bewahren:

Definition 4.18 (Erweiterte Vitali-Menge für kompakte Auswahlen). Analog zur Familie $\mathcal{V}_{fin}$ definieren wir die Familie $\mathcal{V}_{comp}$ als die Menge aller V_f , bei denen für jede Äquivalenzklasse $[x] \in X/\sim$ die Bildmenge $f([x])$ eine nichtleere **kompakte** Teilmenge von X ist. Eine solche Menge bezeichnen wir als:

$$V_K = \bigcup_{[x] \in X/\sim} K_{[x]}, \quad \text{wobei } K_{[x]} = f([x]) \text{ kompakt ist.} \quad (4.59)$$

Satz 4.19 (vgl. [BPV23], S. 778). *Jede erweiterte Vitali-Menge der Familie $\mathcal{V}_{comp}$ ist nicht Lebesgue-messbar.*

Beweis. Der Beweis orientiert sich an der Argumentation von Satz 4.17. Die entscheidende Punkt liegt darin, ein Maximum wählen zu können. Dazu betrachten wir die Menge:

$$E_x = f([x]) \cap K. \quad (4.60)$$

Da $f([x])$ nach Voraussetzung der Familie $\mathcal{V}_{comp}$ kompakt ist und K ebenfalls kompakt gewählt wurde, ist der Schnitt E_x als Durchschnitt zweier kompakter Mengen wiederum eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Es besitzt jede nichtleere kompakte Teilmenge reeller Zahlen ein Maximum. (vgl. [MKL26], S.33) Somit existiert in jeder in K vertretenen Äquivalenzklasse ein eindeutiges Element $y_{max} \in E_x$. Die restliche Argumentation (Disjunktheit der Verschiebungen und der Widerspruch durch die Translationsinvarianz im beschränkten Intervall) folgt exakt dem Beweis von Satz 4.17. Damit ist V_K nicht messbar. $\square$

Die Nichtmessbarkeit wird nicht einfach nur dadurch garantiert, dass man irgend eine beliebige Teilmenge jeder Äquivalenzklasse auswählt. Es kommt ganz entscheidend darauf an, wie man diesen Teil auswählt. Dazu noch das folgende Gegenbeispiel:

Beispiel 4.20 (Messbare Auswahl, vgl. [BPV23], S. 778). Sei $X = [-1, 1]$ und die Auswahlfunktion definiert durch:

$$f([x]) = [x] \cap [0, 1] \quad \text{für jedes } [x] \in X/\sim. \quad (4.61)$$

Es gilt $\emptyset \neq f([x]) \subsetneq [x]$, da jede Äquivalenzklasse $[x]$ dicht in $[-1, 1]$ liegt und somit auch Elemente im Intervall $[-1, 0)$ besitzt, die hier nicht gewählt werden.

Die resultierende erweiterte Vitali-Menge ist:

$$V_f = \bigcup_{[x] \in X/\sim} ([x] \cap [0, 1]). \quad (4.62)$$

Da jede reelle Zahl $y \in [0, 1]$ ihrer eigenen Äquivalenzklasse angehört (d. h. $y \in [y]$), folgt sofort $y \in f([y])$ und damit:

$$V_f = [0, 1]. \quad (4.63)$$

Da das Intervall $[0, 1]$ eine Borel-Menge ist, ist V_f Lebesgue-messbar mit $\lambda_1(V_f) = 1$.

Im nächsten Beispiel wird noch gezeigt, dass auch für eine nicht kompakte Auswahl aus einer fixierten Äquivalenzklasse Nichtmessbarkeit auftreten kann:

Beispiel 4.21 (Nicht-kompakte Vitali-Auswahl). Wieder betrachten wir die Äquivalenzrelation $x \sim_{\mathbb{Q}} y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ und die zugehörige Menge der Äquivalenzklassen. Wir definieren eine Menge V_f durch eine Auswahlfunktion wie folgt:

1. Für eine fixierte Klasse $[r]$ sei $f([r]) = S \subseteq [r]$, wobei $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine streng monotone Folge in $[r]$ ist, deren Grenzwert $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nicht in S enthalten ist (S ist somit nicht kompakt).
2. Für alle übrigen Klassen $[y]$ sei $|f([y])| = 1$.

Die Menge $V_f = \bigcup_{[x] \in X/\sim} f([x])$ stellt eine nicht-kompakte Erweiterung einer klassischen Vitali-Menge dar.

Angenommen, $V_f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Da $S \subseteq V_f$ eine abzählbare Menge ist, gilt $\lambda(S) = 0$ und damit $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ aufgrund der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes. Da die σ -Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ unter der Mengen-Differenz abgeschlossen ist, muss auch die Menge

$$V' = V_f \setminus S$$

messbar sein. V' enthält nach Konstruktion genau einen Repräsentanten für jede Äquivalenzklasse $[y] \setminus [r]$ und keinen Repräsentanten für $[r]$. Sei nun $v \in [r]$ ein beliebiger Repräsentant von $[r]$. Da die einpunktige Menge $\{v\}$ eine Nullmenge ist, folgt aus der Abgeschlossenheit der σ -Algebra unter endlicher Vereinigung:

$$V = V' \cup \{v\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

Die Menge V ist jedoch eine klassische Vitali-Menge, die nicht messbar ist ($V \notin \mathcal{L}$). Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme $V_f \in \mathcal{L}$ falsch war. $\square$

Während die Projektion einer Borel-Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ stets analytisch und damit Lebesgue-messbar ist, geht diese Eigenschaft bei der Vervollständigung zum Lebesgue-Maß im Allgemeinen verloren. Das zeigt das folgende Beispiel:

Satz 4.22 (Projektion einer Lebesgue-messbaren Menge, vgl. [Tao11], S. 45, Exercise 1.2.27). *Sei $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenprojektion $\pi(x, y) := x$. Es gibt eine Lebesgue-messbare Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^2$, so dass $\pi(E)$ nicht Lebesgue-messbar ist.*

Beweis. Sei $C \subseteq [0, 1]$ die Cantor-Menge, von der bekannt ist, dass $\lambda_1(C) = 0$ gilt (vgl. [Els18], S.78f.). Nach einem Satz von G. Cantor existiert eine Bijektion $\phi : C \rightarrow [0, 1]$ (vgl. [Els18], S. 81). Sei $V \subseteq [0, 1]$ eine nicht-Lebesgue-messbare Menge. Da ϕ eine Bijektion ist, existiert eine eindeutige Teilmenge $E' \subseteq C$, sodass das Bild unter ϕ genau V entspricht:

$$\phi(E') = V$$

Wir definieren die Menge $E \subseteq \mathbb{R}^2$ als den Graphen der Zuordnung innerhalb der Ebene:

$$E := \{(\phi(y), y) \in \mathbb{R}^2 : y \in E'\}$$

Es gilt für die Menge E :

$$E \subseteq [0, 1] \times C$$

Das zweidimensionale Lebesgue-Maß des Produkts berechnet sich zu:

$$\lambda_2([0, 1] \times C) = \lambda_1([0, 1]) \cdot \lambda_1(C) = 1 \cdot 0 = 0$$

Da das Lebesgue-Maß λ_2 vollständig ist, ist jede Teilmenge einer Nullmenge messbar (vgl. [Kir26], S. 290). Da E eine Teilmenge der Nullmenge $[0, 1] \times C$ ist, folgt:

$$E \text{ ist } \lambda_2\text{-messbar mit } \lambda_2(E) = 0.$$

Wir betrachten nun die Projektion π auf die erste Koordinate:

$$\pi(E) = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \text{ mit } (x, y) \in E\} = \{\phi(y) : y \in E'\} = V$$

Nach Voraussetzung ist $V = \pi(E)$ nicht Lebesgue-messbar.

Damit haben wir eine messbare Menge $E \subseteq \mathbb{R}^2$ konstruiert, deren Projektion $\pi(E)$ nicht Lebesgue-messbar ist. $\square$

Satz 4.23 (vgl. [Els18], S. 110). *Jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit positivem äußeren Lebesgue-Maß ($\lambda^*(A) > 0$) enthält eine Teilmenge, die nicht Lebesgue-messbar ist.*

Beweis. Wieder führen wir den Beweis durch einen Widerspruch. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge mit $\lambda^*(A) > 0$ und Sei M ein Repräsentantensystem der Faktorgruppe $\mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d$. Die rationalen Verschiebungen $\{M+r \mid r \in \mathbb{Q}^d\}$ bilden eine disjunkte Überdeckung des gesamten $\mathbb{R}^d$. Daher muss auch die Menge A vollständig in der Vereinigung dieser Mengen enthalten sein:

$$A = A \cap \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}^d} (M+r) \right) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^d} (A \cap (M+r)) \quad (4.64)$$

Nach den Eigenschaften des äußeren Maßes λ^* ist dieses σ -subadditiv. Für die obige Zerlegung von A folgt daher:

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{r \in \mathbb{Q}^d} \lambda^*(A \cap (M+r)) \quad (4.65)$$

Da nach Voraussetzung $\lambda^*(A) > 0$ gilt, kann die Summe auf der rechten Seite nicht Null sein. Es muss folglich mindestens ein $r_0 \in \mathbb{Q}^d$ existieren, für welches das äußere Maß des entsprechenden Schnitts positiv ist:

$$\lambda^*(A \cap (M+r_0)) > 0 \quad (4.66)$$

Betrachten wir die Menge $A_0 := A \cap (M+r_0)$. Diese Menge ist per Konstruktion eine Teilmenge einer verschobenen Menge $M+r_0$. Wäre diese Menge A_0 nun Lebesgue-messbar ($A_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$), so müsste nach dem vorigen Satz (angewandt auf das verschobene System) ihr Maß notwendig Null sein:

$$\lambda(A_0) = 0 \quad (4.67)$$

(Da jede messbare Teilmenge eines Repräsentantensystems eine Nullmenge ist). Dies steht im direkten Widerspruch zu der aus der σ -Subadditivität gefolgerten Eigenschaft $\lambda^*(A_0) > 0$. Da für messbare Mengen $A_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ die Identität $\lambda(A_0) = \lambda^*(A_0)$ gelten muss, folgt die Unvereinbarkeit

$$0 = \lambda(A_0) = \lambda^*(A_0) > 0. \quad (4.68)$$

Somit muss die Annahme der Messbarkeit von A_0 verworfen werden. Da $A_0 \subseteq A$ gilt, folgt, dass jede Menge mit positivem äußeren Maß eine nicht messbare Teilmenge enthält. $\square$

Für ein weiteres interessantes Beispiel zunächst die folgende Definition und Satz:

Definition 4.24 (Hamel-Basis, vgl. [MKL26], S. 103). Sei X ein Vektorraum. Eine Hamel-Basis ist eine linear unabhängige Familie $\{e_j : j \in J\} \subset X$, so dass jedes $x \in X$ als eine endliche Linearkombination der Basiselemente dargestellt werden kann.

Man kann zeigen (mithilfe des Lemmas von Zorn (vgl. [MKL26], S. 121), das zum Auswahlaxiom äquivalent ist), dass jeder Vektorraum X eine Hamel-Basis besitzt. (vgl. [MKL26], S. 122)

Satz 4.25 (H. Steinhaus, vgl. [Els18], S. 75). Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge mit positivem Maß ($\lambda(A) > 0$). Dann enthält die Differenzenmenge

$$A - A = \{x - y : x, y \in A\}$$

eine offene Kugel $K_\varepsilon(0) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < \varepsilon\}$ um den Ursprung.

Satz 4.26. Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^d$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ und eine Hamel-Basis $B \subset \mathbb{R}^d$. Jede Lebesgue-messbare Hamel-Basis B von $\mathbb{R}^d$ ist eine Lebesgue-Nullmenge ($\lambda(B) = 0$).

Satz 4.27. Sei B eine Hamel-Basis von $\mathbb{R}^d$ über $\mathbb{Q}$ und $a \in B$. Dann ist der $\mathbb{Q}$ -Unterraum

$$M = \text{Span}_{\mathbb{Q}}(B \setminus \{a\})$$

nicht Lebesgue-messbar.

Beweis. Angenommen, $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Da B eine Basis ist, gilt die disjunkte Zerlegung:

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (M + ra)$$

Aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ und der Translationsinvarianz von λ folgt:

$$\lambda(\mathbb{R}^d) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \lambda(M + ra) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \lambda(M)$$

Wäre $\lambda(M) = 0$, so würde $\lambda(\mathbb{R}^d) = 0$ folgen, was ein Widerspruch ist. Also muss $\lambda(M) > 0$ gelten. Nach dem Satz von Steinhaus (vgl. 4.25) enthält die Differenzenmenge $M - M$ eine Umgebung der Null:

$$\exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(0) \subseteq M - M$$

Da M ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraum ist, gilt $M - M = M$, woraus folgt:

$$K_\varepsilon(0) \subseteq M$$

Wähle $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $ra \in K_\varepsilon(0)$. Dann gilt $ra \in M$. Dies impliziert:

$$ra = \sum_{i=1}^n q_i b_i \quad \text{mit } q_i \in \mathbb{Q}, b_i \in B \setminus \{a\}$$

Dies widerspricht der linearen Unabhängigkeit von B über $\mathbb{Q}$, da a als Linearkombination von Elementen aus $B \setminus \{a\}$ dargestellt wird. Somit ist M nicht messbar. $\square$

Lemma 4.28. *Für jede Lebesgue-messbare Menge $E \subseteq \mathbb{R}^d$ und jedes $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist auch cE Lebesgue-messbar mit $\lambda(cE) = |c|^d \lambda(E)$.*

Beweis. Wir führen den Beweis über das äußere Maß λ^* (vgl. 4.3) und die Carathéodory-Bedingung (vgl. 4.4). Da für jeden Quader I_k $\lambda(cI_k) = |c|^d \lambda(I_k)$ gilt, folgt für jede Überdeckung:

$$\lambda^*(cE) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(cI_k) = |c|^d \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k).$$

Durch Übergang zum Infimum folgt $\lambda^*(cE) \leq |c|^d \lambda^*(E)$. Durch die Substitution $E \rightarrow cE$ und $c \rightarrow 1/c$ ergibt sich die umgekehrte Ungleichung und somit:

$$\lambda^*(cE) = |c|^d \lambda^*(E) \quad \text{für alle } E \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Eine Menge E ist genau dann Lebesgue-messbar (vgl. 4.4), wenn für alle Testmengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Wir prüfen dies für die Menge cE . Sei A eine beliebige Testmenge. Wir setzen $A = cA'$ für eine geeignete Menge A' :

$$\lambda^*(cA') \stackrel{?}{=} \lambda^*(cA' \cap cE) + \lambda^*(cA' \cap (cE)^c).$$

Da $(cE)^c = c(E^c)$ und die Skalierung distributiv über den Schnitt ist ($cX \cap cY = c(X \cap Y)$), erhalten wir:

$$\lambda^*(cA') \stackrel{?}{=} \lambda^*(c(A' \cap E)) + \lambda^*(c(A' \cap E^c)).$$

Es ergibt sich:

$$|c|^d \lambda^*(A') = |c|^d \lambda^*(A' \cap E) + |c|^d \lambda^*(A' \cap E^c).$$

Da E messbar ist, ist diese Gleichung nach Division durch $|c|^d$ erfüllt. Somit erfüllt cE das Carathéodory-Kriterium und ist Lebesgue-messbar. Da für messbare Mengen $\lambda(cE) = \lambda^*(cE)$ gilt, folgt direkt:

$$\lambda(cE) = |c|^d \lambda(E).$$

$\square$

Satz 4.29 (Nicht-Messbarkeit von Hamel-Untergruppen, vgl. [Els18], S. 117, Aufgabe 3.12). *Sei B eine Hamel-Basis von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Dann ist die von B erzeugte additive Untergruppe $G := \langle B \rangle_{\mathbb{Z}}$ nicht Lebesgue-messbar.*

Beweis. Nach Definition besteht G aus allen endlichen Linearkombinationen $\sum n_i b_i$ mit $n_i \in \mathbb{Z}$ und $b_i \in B$. Da B eine Hamel-Basis ist, ist jedes $x \in \mathbb{R}$ eindeutig als $\sum q_i b_i$ mit $q_i \in \mathbb{Q}$ darstellbar. Jedes $q \in \mathbb{Q}$ lässt sich als k/m mit $k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ schreiben. Für jedes Element $x = \sum \frac{k_i}{m_i} b_i \in \mathbb{R}$ existiert ein Hauptnenner $M \in \mathbb{N}$, sodass $M \cdot x \in G$. Somit gilt $x \in \frac{1}{M}G$. Daraus folgt die Darstellung:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}G, \quad \text{wobei } \frac{1}{n}G = \{\frac{1}{n}g : g \in G\}.$$

Wäre $\lambda(G) = 0$, so wäre aufgrund von Lemma 4.28 des Lebesgue-Maßes auch $\lambda(\frac{1}{n}G) = \frac{1}{n}\lambda(G) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}G$ wäre somit ebenfalls eine Nullmenge. Dies widerspricht jedoch $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$. Wäre $\lambda(G) > 0$, so besagt der Satz von Steinhaus, dass die Differenzmenge $G - G$ eine Umgebung der Null enthalten muss, also $(-\epsilon, \epsilon) \subset G - G$ für ein $\epsilon > 0$. Da G eine additive Gruppe ist, gilt $G - G = G$. Eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$, die ein offenes Intervall enthält, ist jedoch bereits identisch mit $\mathbb{R}$. Es müsste also $G = \mathbb{R}$ gelten. (Denn: Sei $x \in \mathbb{R}$: Wähle $n \in \mathbb{Z}$ so groß, dass $\frac{x}{n} \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dann ist $\frac{x}{n} \in G$. Da G eine Untergruppe ist, muss auch die n -fache Summe $n \cdot \frac{x}{n} = x$ in G liegen.)

Dies steht im direkten Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Hamel-Basis B : Beispielsweise ist für ein $b \in B$ das Element $x = \frac{1}{2}b \in \mathbb{R}$ nicht in G enthalten, da $x = \sum q_i b_i$ eine eindeutige Darstellung besitzt und $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Da G weder eine Nullmenge noch eine Menge von positivem Maß sein kann, ist G nicht Lebesgue-messbar. $\square$

Während die Konstruktion der Vitali-Menge primär auf der algebraischen Gruppenstruktur des $\mathbb{R}^d$ und der Invarianz des Maßes unter rationalen Translationen basiert, verfolgt das nächste Beispiel, das sogenannte Bernstein-Monster, einen rein topologischen und mengentheoretischen Ansatz. Das entscheidende Werkzeug ist dabei die Kardinalität: Unter Ausnutzung des Satzes von Cantor-Bendixson (sh. 4.30) wird sichergestellt, dass jede überabzählbare abgeschlossene Menge die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Mithilfe einer Rekursion und des Auswahlaxioms wird eine Menge konstruiert, die in jedem Schritt die topologischen Bausteine des Raumes durchdringt, ohne deren Struktur jemals vollständig in sich aufzunehmen.

Lemma 4.30 (Satz von Cantor-Bendixson, vgl. [Hen18], S. 11). *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

1. *A ist höchstens abzählbar.*
2. *Es gibt eine Bijektion $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ (d. h. A hat die Mächtigkeit des Kontinuums).*

Satz 4.31 (Bernstein-Monster, vgl. [Her06], S. 120). *Es existiert eine Teilmenge $B \subseteq [0, 1]$, die jede überabzählbare abgeschlossene Menge $A \subseteq [0, 1]$ schneidet, aber keine solche Menge als Teilmenge enthält. Eine solche Menge B ist nicht Lebesgue-messbar.*

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass die Menge $\mathcal{A}$ aller überabzählbaren abgeschlossenen Teilmengen von $[0, 1]$ die Kardinalität $\mathfrak{c}$ besitzt:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge. Nach der Definition der Offenheit existiert zu jedem $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(a) \subseteq U$. Sei M_a die Menge aller rationalen Radien $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ mit $K_\varepsilon(a) \subseteq U$. Da die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dicht in U liegen, lässt sich jede offene Menge U als abzählbare Vereinigung von Intervallen mit rationalen Mittelpunkten und rationalen Radien darstellen:

$$U = \bigcup_{a \in \mathbb{Q} \cap U} \left(\bigcup_{\varepsilon \in M_a} K_\varepsilon(a) \right) \quad (4.69)$$

Da die Menge der Paare $(a, \varepsilon) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ abzählbar ist, gibt es nur $2^{\aleph_0}$ Möglichkeiten, solche Intervalle zu kombinieren. Folglich gibt es $2^{\aleph_0}$ offene und damit auch $2^{\aleph_0}$ abgeschlossene Mengen, da jede offene Menge eindeutig eine abgeschlossene Menge definiert (nämlich ihr Komplement). Unter Anwendung des Wohlordnungssatzes, der zum Auswahlaxiom äquivalent ist, lässt sich die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ – und folglich auch $\mathcal{A}$ – wohlordnen. Dies impliziert, dass die Mächtigkeit des Kontinuums $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ einer bestimmten Aleph-Zahl $\aleph$ entspricht. Wir indizieren $\mathcal{A}$ daher als:

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha < \aleph\}. \quad (4.70)$$

Es ist hierbei wichtig anzumerken, dass ohne die Annahme der Kontinuumshypothese (CH) lediglich bekannt ist, dass $\aleph \geq \aleph_1$ gilt (vgl. [Kan25], S. 5). Da die spezifische Position von $\mathfrak{c}$ in der Aleph-Hierarchie für die logische Konsistenz der Rekursion jedoch unerheblich ist, bezeichnen wir mit $\aleph$ diejenige Aleph-Zahl, für die $|\aleph| = \mathfrak{c}$ gilt.

Wir konstruieren nun zwei disjunkte Mengen $B, C \subseteq [0, 1]$ durch Rekursion. Für jeden Schritt $\alpha < \aleph$ betrachten wir die Menge der bereits in früheren Schritten $\beta < \alpha$ gewählten Punkte:

$$F_\alpha = \{x_\beta \mid \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta \mid \beta < \alpha\} \quad (4.71)$$

Nach Konstruktion gilt $x_\alpha, y_\alpha \in A_\alpha$. Die Kardinalität von F_α ist $|\alpha| \cdot 2 = |\alpha|$, was für alle $\alpha < \aleph$ strikt kleiner als $\aleph$ ist. Da jede Menge $A_\alpha \in \mathcal{A}$ nach Voraussetzung überabzählbar und abgeschlossen ist, folgt aus dem Satz von Cantor-Bendixson, dass

$$|A_\alpha| = \aleph \quad (4.72)$$

gilt. Aus der Kardinalzahlarithmetik folgt:

$$|A_\alpha \setminus F_\alpha| = \max\{|A_\alpha|, |F_\alpha|\} = \aleph \quad (4.73)$$

Wir wählen unter Anwendung des Auswahlaxioms zwei Punkte $x_\alpha \neq y_\alpha$ mit:

$$x_\alpha = f(A_\alpha \setminus F_\alpha) \quad \text{und} \quad y_\alpha = f(A_\alpha \setminus (F_\alpha \cup \{x_\alpha\})), \quad (4.74)$$

wobei $f(X) \in X$ ist. Nach Abschluss der Rekursion definieren wir $B = \{x_\alpha \mid \alpha < \aleph\}$ und $C = [0, 1] \setminus B$.

Per Konstruktion schneidet B jede überabzählbare abgeschlossene Menge A_α (da $x_\alpha \in B \cap A_\alpha$), enthält jedoch keine (da $y_\alpha \in A_\alpha \setminus B$). Wäre B Lebesgue-messbar, so müsste aufgrund von Korollar 4.11 gelten:

$$\lambda(B) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subseteq B, K \text{ kompakt}\}. \quad (4.75)$$

Nach Konstruktion enthält B jedoch keine überabzählbare abgeschlossene Teilmenge. Da jede kompakte Menge $K \subseteq B \subseteq [0, 1]$ insbesondere abgeschlossen ist, muss K somit höchstens abzählbar sein. Da das Lebesgue-Maß einer höchstens abzählbaren Menge Null ist, folgt $\lambda(K) = 0$ für alle kompakten $K \subseteq B$. Daraus ergibt sich: $\lambda(B) = 0$. Analog folgt $\lambda(C) = 0$ für $C = [0, 1] \setminus B$. Dies führt zum Widerspruch:

$$\lambda(B \cup C) \leq \lambda(B) + \lambda(C) = 0 \quad (4.76)$$

da die Vereinigung $B \cup C$ in $[0, 1]$ das Lebesgue-Maß von 1 besitzt. Somit ist B nicht messbar. $\square$

5 Das Inhaltsproblem

Nach der Erkenntnis, dass das Maßproblem von Lebesgue im Sinne der σ -Additivität keine Lösung für alle Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ zulässt, stellte sich die fundamentale Frage nach der Notwendigkeit dieser strengen Forderung. Ein möglicher Ausweg besteht darin, die strukturellen Anforderungen an die Abbildung zu verringern, um eine größere Klasse von messbaren Mengen zu gewinnen (vgl. [Kre12], S. 12).

Verzichtet man auf die Forderung der σ -Additivität und beschränkt sich stattdessen auf die endliche Additivität, so gelangt man vom Begriff des Maßes zum Begriff des Inhalts. Während die σ -Additivität für Grenzwertbetrachtungen unerlässlich ist, erscheint die endliche Additivität als die minimal notwendige Eigenschaft, die unserem intuitiven Verständnis von Volumen entspricht: Setzt man einen Körper aus einer endlichen Anzahl von disjunkten Teilstücken zusammen, so muss die Summe der Einzelvolumina dem Gesamtvolumen entsprechen.

Es stellt sich heraus, dass die Lösbarkeit dieses abgeschwächten Problems von der geometrischen Dimension d und der Struktur der zugrunde liegenden Bewegungsgruppe abhängt. Während in den Dimensionen $d = 1$ und $d = 2$ tatsächlich ein solcher universeller Inhalt existiert, führt die höhere Komplexität der Rotationsgruppe im $\mathbb{R}^d$ für $d \geq 3$ zu tief liegenden paradoxen Resultaten, welche die Grenzen der intuitiven Volumenmessung aufzeigen (vgl. [Els18], S. 4).

Das Inhaltsproblem

Gesucht ist eine Abbildung (Inhaltsfunktion) $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt (vgl. [Els18], S. 4):

1. **Bewegungsinvarianz:**

$$\forall \beta \in \text{Isom}(\mathbb{R}^d), \forall A \subseteq \mathbb{R}^d : m(\beta(A)) = m(A) \quad (5.1)$$

2. **Endliche Additivität:** Für jede endliche Kollektion paarweise disjunkter Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n m(A_i). \quad (5.2)$$

3. **Normierung:** Für den d -dimensionalen Einheitswürfel $[0, 1]^d$ gilt:

$$m([0, 1]^d) = 1. \quad (5.3)$$

6 Das Banach-Tarski Paradoxon

Dass das Inhaltsproblem für $d = 3$ unlösbar ist, wird auf faszinierende Weise aufgrund des folgenden Paradox von S. Banach und A. Tarski verdeutlicht:

Theorem 6.1 (Banach-Tarski-Paradoxon (starke Form), vgl. [TW16], S. 31). *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ beschränkte Mengen mit nicht-leerem Inneren. Dann existiert eine Zerlegung von A in endlich viele disjunkte Teilmengen $C_1, \dots, C_n \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine Folge von Bewegungen $\beta_1, \dots, \beta_n$, sodass gilt:*

1. $A = \bigcup_{i=1}^n C_i$
2. $B = \bigcup_{i=1}^n \beta_i(C_i)$

Das Banach-Tarski-Paradoxon demonstriert die geometrischen Konsequenzen der von Vitali entdeckten Nicht-Messbarkeit im Raum. Es zeigt, dass die durch das Auswahlaxiom bedingten Pathologien der Vitali-Menge fundamentale Auswirkungen auf unseren elementargeometrischen Volumenbegriff im $\mathbb{R}^3$ haben.

Die Irritation über das Banach-Tarski-Paradoxon rührt oft daher, dass es das euklidische Prinzip verletzt, wonach ein Teil stets kleiner als das Ganze sein muss. Arnold Kirsch zeigt jedoch auf, dass solche Tatsachen schon früher bekannt sind (vgl. [Kir90], S. 3):

Ein Beispiel hierfür ist die Halbgerade $H = [0, \infty)$. Betrachten wir die Teilmenge $H' = [1, \infty)$, die durch das Entfernen des Segments $[0, 1)$ entsteht, so gilt:

$$H \sim H' \quad (6.1)$$

Durch die Translation $x \mapsto x - 1$ lässt sich H' exakt auf H abbilden. Obwohl H' eine echte Teilmenge von H ist, sind beide Mengen kongruent und besitzen in einem verallgemeinerten Sinne dieselbe „Größe“. Selbst bei beschränkten Körpern gibt es ähnliche Beispiele (sh. 6.3).

Als ersten Schritt werden wir ein schwächeres Resultat des Paradoxons von Banach-Tarski beweisen, das aus dem Hausdorffparadoxon hergeleitet werden kann, dazu aber zunächst die Definitionen zur Äquizerlegbarkeit und Paradoxie von Mengen:

Definition 6.2 (Äquizerlegbarkeit bezüglich G , vgl. [TW16], S. 25). Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Zwei Teilmengen $U, V \subseteq X$ heißen **äquizerlegbar bezüglich G** (kurz $U \sim_G V$), falls sie in dieselbe endliche Anzahl disjunkter Teilmengen zerlegt werden können:

$$U = \bigcup_{i=1}^k S_i \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{i=1}^k T_i \quad \text{mit} \quad S_i \cap S_j = T_i \cap T_j = \emptyset \quad \text{für} \quad i \neq j, \quad (6.2)$$

sodass die entsprechenden Teilstücke zueinander **G -kongruent** sind. Das bedeutet, es existieren Elemente $\phi_1, \dots, \phi_k \in G$, für die gilt:

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : \phi_i S_i = T_i. \quad (6.3)$$

Beispiel 6.3 (vgl. [Win21], S. 9). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Kreislinie und $p \in S$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt $S \sim_{SO_2} S \setminus \{p\}$. Das bedeutet, ein Kreis ist äquizerlegbar zu einem Kreis, dem ein Punkt fehlt, wobei als Gruppe G die Rotationen SO_2 verwendet werden.

Beweis. O.E.d.A. sei S der Einheitskreis in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ und $p = (1, 0)$ gegeben. Wir betrachten eine unendliche Menge von Punkten $D \subseteq S$, die durch wiederholte Rotation entsteht:

$$D = \{e^{in} \mid n \in \mathbb{N}^+\} = \{e^{i1}, e^{i2}, e^{i3}, \dots\}. \quad (6.4)$$

Da π irrational ist, sind alle Elemente in D paarweise verschieden und es gilt $p \notin D$. Wir definieren nun eine Rotation $\rho \in SO_2$ durch $\rho(z) = z \cdot e^{-i}$. Für die Bildmenge von D unter dieser Rotation gilt:

$$\rho(D) = \{e^{i(n-1)} \mid n \in \mathbb{N}^+\} = \{e^{i0}, e^{i1}, e^{i2}, \dots\} = D \cup \{p\}. \quad (6.5)$$

Wir zerlegen den Kreis $S \setminus \{p\}$ nun in zwei disjunkte Teile U und V :

1. $U = S \setminus (D \cup \{p\})$,
2. $V = D$

Es gilt $S \setminus \{p\} = U \cup V$ mit $U \cap V = \emptyset$. Durch Anwendung der Rotationen id auf U und ρ auf V erhalten wir:

$$\text{id}(U) \cup \rho(V) = (S \setminus (D \cup \{p\})) \cup (D \cup \{p\}) = S. \quad (6.6)$$

Damit ist $S \setminus \{p\} \sim_{SO_2} S$ gezeigt. □

Satz 6.4. Die Äquizerlegbarkeit bezüglich einer Gruppe G ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. **1. Reflexivität:** Für jede Menge U gilt $U \sim_G U$, mit $\phi_1 = \text{id} \in G$.

2. Symmetrie: Gelte $U \sim_G V$. Dann existieren Zerlegungen $U = \bigcup_{i=1}^k S_i$ und $V = \bigcup_{i=1}^k T_i$ mit $\phi_i S_i = T_i$. Da G eine Gruppe ist, existieren die Inversen $\phi_i^{-1} \in G$. Damit gilt $\phi_i^{-1} T_i = S_i$. Dies liefert

die Zerlegung für $V \sim_G U$.

3. Transitivität: Gelte $U \sim_G V$ und $V \sim_G W$. Sei die erste Zerlegung gegeben durch:

$$U = \bigcup_{i=1}^n S_i, \quad V = \bigcup_{i=1}^n T_i \quad \text{mit } \phi_i S_i = T_i, \quad (6.7)$$

und die zweite Zerlegung (von V nach W) durch:

$$V = \bigcup_{j=1}^m T'_j, \quad W = \bigcup_{j=1}^m R_j \quad \text{mit } \psi_j T'_j = R_j. \quad (6.8)$$

Um eine Zerlegung von U nach W zu finden, betrachten wir die Schnittmengen in V und ziehen sie auf U zurück. Wir definieren für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$U_{ij} = \phi_i^{-1}(T_i \cap T'_j). \quad (6.9)$$

Diese Mengen U_{ij} bilden eine Partition von U , da:

$$\bigcup_{i,j} U_{ij} = \bigcup_i \phi_i^{-1} \left(T_i \cap \bigcup_j T'_j \right) = \bigcup_i \phi_i^{-1}(T_i \cap V) = \bigcup_i S_i = U. \quad (6.10)$$

Nun wenden wir die kombinierten Gruppenoperationen $\psi_j \circ \phi_i \in G$ an:

$$\bigcup_{i,j} (\psi_j \phi_i)(U_{ij}) = \bigcup_{i,j} \psi_j(T_i \cap T'_j) = \bigcup_j \psi_j \left(\bigcup_i T_i \cap T'_j \right) = \bigcup_j \psi_j(V \cap T'_j) = \bigcup_j R_j = W. \quad (6.11)$$

Damit ist eine endliche Zerlegung von U in $n \cdot m$ Teile gefunden, die $U \sim_G W$ zeigt. $\square$

Definition 6.5 (Paradox bezüglich G , vgl. [TW16], S. 27). Eine Menge U heißt paradox bezüglich einer Gruppe G , wenn es paarweise disjunkte Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ und $T_1, \dots, T_m$ von U gibt, die U partitionieren (d. h. $U = \bigcup_{i=1}^n S_i \cup \bigcup_{j=1}^m T_j$), sowie Gruppenelemente $\phi_1, \dots, \phi_n$ und $\psi_1, \dots, \psi_m \in G$, sodass gilt:

$$U = \bigcup_{i=1}^n \phi_i S_i \quad \text{und} \quad U = \bigcup_{j=1}^m \psi_j T_j. \quad (6.12)$$

Das bedeutet anschaulich, dass man aus den Teilen einer einzigen Menge U durch geschickte Bewegung zwei vollständige Kopien derselben Menge U zusammensetzen kann. Eine Gruppe G wird als paradox bezeichnet, wenn sie paradox bezüglich sich selbst ist, im Sinne der Linksmultiplikation als Gruppenoperation (vgl. [Pet06], S. 3).

Nun zur Formulierung des Hausdorff-Paradoxons und des schwachen Banach-Tarski Paradoxons:

Theorem 6.6 (Hausdorff-Paradoxon, vgl. [TW16], S. 17). *Es existiert eine abzählbare Teilmenge $D \subseteq S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, sodass die Menge $S^2 \setminus D$ eine SO_3 -paradoxe Menge ist.*

Theorem 6.7 (Banach-Tarski-Paradoxon (schwache Form), vgl. [TW16], S. 4). *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein abgeschlossener Ball mit Radius $r > 0$, definiert durch*

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|x - y\| \leq r\}.$$

Dann ist $\overline{B_r(x)}$ paradox bezüglich der Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$.

Der Beweis des Banach-Tarski Paradoxons

Die Beweisführung zum Banach-Tarski-Paradoxon in dieser Arbeit ist gegliedert und vollzieht in mehreren logisch aufeinanderfolgenden Schritten den Übergang von der abstrakten Algebra zur geometrischen Konstruktion im euklidischen Raum.

Ein zentraler Ausgangspunkt ist hier, dass jede freie Gruppe vom Rang 2 paradox ist. Diese Gruppe dient im weiteren Verlauf als strukturelles Fundament für die spätere Mengenverdopplung. Im darauf folgenden Schritt wird durch eine Konstruktion zweier Rotationen innerhalb von SO_3 , die so gewählt sind, dass keine nichttrivialen Relationen entstehen, und damit isomorph zu F_2 sind, nachgewiesen, dass diese paradoxe Gruppenstruktur sich zunächst auf die Einheitssphäre bzgl. der Gruppe SO_3 übertragen lässt. Dabei wird gezeigt, dass die Sphäre — unter Berücksichtigung der abzählbaren Menge von Fixpunkten der gewählten Rotationen — eine paradoxe Zerlegung erlaubt.

In einem weiteren Schritt wird diese Paradoxie von der Oberfläche auf den dreidimensionalen Körper ausgeweitet. Mittels einer radialen Projektion lässt sich die paradoxe Struktur der Sphäre direkt auf die punktierte Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$ übertragen. Aufgrund der Äquivarianz dieser Projektion bezüglich der Gruppenoperationen von SO_3 bleibt die Zerlegungseigenschaft im gesamten Volumen (exklusive des Ursprungs) erhalten.

Den Abschluss bildet der Übergang von der punktierten Kugel zur Vollkugel $\overline{B_1(0)}$. Hier wird noch nachgewiesen, dass die Vollkugel äquizerlegbar zu der um den Ursprung reduzierten Kugel ist, also $\overline{B_1(0)} \sim_{SO_3} \overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$.

Um dann das starke Banach-Tarski Paradoxon zu beweisen, muss die rein geometrische Konstruktion durch das Banach-Schröder-Bernstein-Theorem ergänzt werden. Angesichts der paradoxen Mengen spielt dieses Theorem eine Schlüsselrolle, da es uns erlaubt, von der bloßen gegenseitigen Einbettbarkeit zweier Mengen ($A \preceq_G B$ und $B \preceq_G A$) direkt auf deren vollständige Äquizerlegbarkeit ($A \sim_G B$) zu schließen.

Um den Übergang zwischen den verschiedenen Stadien der Konstruktion zu begründen, formulieren wir den folgenden Satz zur Vererbung der Paradoxie:

Satz 6.8. *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und seien $U, V \subseteq X$ äquizerlegbare Mengen ($U \sim_G V$). Dann gilt:*

1. Es existiert eine bijektive Funktion $g : U \rightarrow V$, sodass für jede Teilmenge $C \subseteq U$ gilt, dass C äquizerlegbar zu $g(C)$ ist ($C \sim_G g(C)$) (vgl. [TW16], S. 27).

2. Ist U paradox bezüglich G , so ist auch V paradox bezüglich G (vgl. [Pet06], S. 3)

Beweis. 1.: Konstruktion der Bijektion g

Nach Definition der Äquizerlegbarkeit existieren disjunkte Partitionen von U und V :

$$U = \bigcup_{i=1}^k S_i \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{i=1}^k T_i$$

sowie Gruppenelemente $\phi_1, \dots, \phi_k \in G$, für die gilt: $\forall i \in \{1, \dots, k\} : \phi_i S_i = T_i$. Wir definieren die Funktion $g : U \rightarrow V$ stückweise:

$$g(x) := \phi_i x \quad \text{falls } x \in S_i$$

Da die S_i und T_i jeweils disjunkt sind und die ϕ_i bijektiv operieren, ist g eine Bijektion zwischen U und V . Für eine beliebige Teilmenge $C \subseteq U$ betrachten wir die Zerlegung:

$$C = \bigcup_{i=1}^k (C \cap S_i)$$

Das Bild unter g ergibt sich zu:

$$g(C) = \bigcup_{i=1}^k \phi_i (C \cap S_i)$$

Da die Bildstücke $\phi_i (C \cap S_i)$ disjunkt sind, folgt: $C \sim_G g(C)$.

2.: Übertragung der Paradoxie

Angenommen, U ist paradox. Dann existieren disjunkte Mengen $A, B \subseteq U$ mit:

$$A \sim_G U \quad \text{und} \quad B \sim_G U$$

Aufgrund der Transitivität der Relation $\sim_G$ und der Voraussetzung $U \sim_G V$ erhalten wir: $A \sim_G V$ und $B \sim_G V$. Wir betrachten nun die Bilder dieser Mengen unter der Bijektion g :

$$A' := g(A) \quad \text{und} \quad B' := g(B)$$

Wegen der Bijektivität von g und $A \cap B = \emptyset$ gilt: $A' \cap B' = \emptyset$ mit $A', B' \subseteq V$. Nach dem Resultat aus Teil 1 wissen wir: $A \sim_G A'$ und $B \sim_G B'$. Durch erneute Anwendung der Transitivität ergibt sich schließlich:

$$A' \sim_G V \quad \text{und} \quad B' \sim_G V$$

Damit ist V in zwei disjunkte Mengen zerlegbar, die jeweils äquizerlegbar zu V sind. Dies beweist, dass V paradox ist. $\square$

Definition 6.9 (Stabilisator, vgl. [Kio26], S. 79). Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Für ein beliebiges Element $x \in X$ ist der **Stabilisator** von x in G definiert als die Menge aller Gruppenelemente, die x invariant lassen:

$$\text{St}_G(x) := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

Definition 6.10 (Fixpunktmenge, vgl. [Kio26], S. 79f.). Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Für jedes Gruppenelement $g \in G$ bezeichnen wir die Menge der **Fixpunkte** von g als:

$$\text{Fix}_X(g) := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

Wenn der Stabilisator eines Punktes $x \in X$ lediglich aus dem neutralen Element besteht, also

$$\text{St}_G(x) = \{e\},$$

dann sagt man, die Gruppe operiert **fixpunktfrei**, (vgl. [Pet06], S.6) auf dem Punkt x . Anschaulich bedeutet dies, dass jede echte Bewegung $g \in G \setminus \{e\}$ den Punkt x notwendig an eine neue Position verschiebt.

Definition 6.11 (Bahn / Orbit, vgl. [Kio26], S. 78). Es sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Für ein Element $x \in X$ heißt die Menge

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

die **Bahn** von x (oder auch der **Orbit** von x). Die Wirkung von G auf X induziert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X , definiert durch:

$$x \sim y \iff \exists g \in G : g \cdot x = y.$$

Wir wollen nun eine hinreichende Bedingung herleiten, ob eine Menge X paradox bezüglich einer Gruppe G ist. Hier werden wir auch das Auswahlaxiom verwenden:

Satz 6.12 (vgl. [Pet06], S. 6). *Sei G eine paradoxe Gruppe, die fixpunktfrei auf einer Menge X operiert. Dann ist auch die Menge X paradox bezüglich G .*

Beweis. Da G auf X operiert, induziert dies eine Zerlegung von X in disjunkte Bahnen (Orbits). Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Menge $M \subseteq X$, die aus jeder Bahn genau einen Repräsentanten enthält. Damit lässt sich X als disjunkte Vereinigung schreiben:

$$X = \bigcup_{m \in M} G \cdot m = \bigcup_{m \in M} \{g \cdot m \mid g \in G\}$$

Für jedes fixierte $m \in M$ betrachten wir die Abbildung:

$$\varphi_m : G \rightarrow G \cdot m, \quad g \mapsto g \cdot m$$

Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv. Da die Wirkung von G nach Voraussetzung fixpunktfrei ist, gilt für den Stabilisator jedes Elements $\text{St}_G(m) = \{e\}$. Daraus folgt die Injektivität von φ_m :

$$g \cdot m = h \cdot m \implies (h^{-1}g) \cdot m = m \implies h^{-1}g = e \implies g = h$$

Somit ist φ_m eine Bijektion, die zudem G -äquivariant ist, da für alle $g, h \in G$ gilt:

$$\varphi_m(h \cdot g) = (hg) \cdot m = h \cdot (g \cdot m) = h \cdot \varphi_m(g)$$

Da G paradox ist, existieren disjunkte Zerlegungen $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ und $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$ sowie Elemente $\alpha_i, \beta_j \in G$, sodass:

$$G = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i A_i \quad \text{und} \quad G = \bigcup_{j=1}^k \beta_j B_j$$

Wir übertragen diese Struktur nun auf jede Bahn $G \cdot m$ mittels der Bijektion φ_m . Wir definieren für jedes $m \in M$:

$$A_m := \varphi_m(A) \quad \text{und} \quad B_m := \varphi_m(B)$$

Aufgrund der Bijektivität und Äquivarianz von φ_m sind A_m und B_m disjunkte Teilmengen von $G \cdot m$, die jeweils äquizerlegbar zu $G \cdot m$ sind. Um das zu zeigen, wenden wir die Abbildung φ_m auf die gesamte Menge G an:

$$G \cdot m = \varphi_m(G) = \varphi_m\left(\bigcup_{i=1}^n \alpha_i A_i\right)$$

Unter Verwendung der G -Äquivarianz ergibt sich:

$$G \cdot m = \bigcup_{i=1}^n \varphi_m(g_i A_i) = \bigcup_{i=1}^n g_i \cdot \varphi_m(A_i)$$

Setzt man $S_i := \varphi_m(A_i)$, so bilden diese Mengen eine Zerlegung von A_m , da $\bigcup_{i=1}^n S_i = \bigcup_{i=1}^n \varphi_m(A_i) = \varphi_m(A) = A_m$. Damit gilt:

$$A_m = \bigcup_{i=1}^n S_i \quad \text{und} \quad G \cdot m = \bigcup_{i=1}^n g_i S_i$$

Dies entspricht exakt der Definition von $A_m \sim_G G \cdot m$. Die Argumentation für B_m verläuft analog. Durch Vereinigung über alle Repräsentanten $m \in M$ erhalten wir die Teilmengen:

$$\mathcal{A} := \bigcup_{m \in M} A_m \quad \text{und} \quad \mathcal{B} := \bigcup_{m \in M} B_m$$

Diese Mengen sind nach Konstruktion disjunkt in X . Da jede Bahn einzeln verdoppelt werden kann, folgt für die gesamte Menge:

$$\mathcal{A} \sim_G \bigcup_{m \in M} (G \cdot m) = X \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \sim_G \bigcup_{m \in M} (G \cdot m) = X$$

Damit ist gezeigt, dass X zwei disjunkte Teilmengen enthält, die jeweils äquizerlegbar zu X sind. Dies beweist die Paradoxie von X . $\square$

Um das Banach-Tarski-Paradoxon zu realisieren, ist die Untersuchung von Untergruppen der Bewegungsgruppe des $\mathbb{R}^3$ unerlässlich. Von besonderem Interesse sind dabei Gruppen, die von zwei Rotationen erzeugt werden und eine freie Struktur aufweisen.

Definition 6.13 (Frei erzeugte Untergruppe, vgl. [Kre12], S. 13). Sei H eine Gruppe und $S = \{x_1, x_2\} \subseteq H$. Die von S erzeugte Untergruppe $G := \langle x_1, x_2 \rangle$ besteht aus dem neutralen Element e sowie allen endlichen Sequenzen (Wörtern), (vgl. [Kio26], S. 144), der Form:

$$w = s_1^{q_1} s_2^{q_2} \dots s_r^{q_r} \quad \text{mit } s_i \in S, q_i \in \{1, -1\} \text{ und } r \in \mathbb{N}. \quad (6.13)$$

Die Gruppe G heißt **frei erzeugt** über S , falls jedes Element in G durch genau ein **reduziertes** Wort dargestellt werden kann. Dabei heißt ein Wort reduziert, wenn es keine Sequenzen der Form xx^{-1} oder $x^{-1}x$ für ein $x \in S$ enthält (vgl. [Kio26], S. 146).

Die Forderung nach der Eindeutigkeit der Darstellung ist äquivalent zu der Aussage, dass das neutrale Element keine nichttriviale reduzierte Darstellung besitzt. In einer freien Gruppe existieren somit keine Relationen zwischen den Erzeugern x_1 und x_2 , abgesehen von den trivialen Gruppenaxiomen (wie $x_1 \cdot x_1^{-1} = e$).

Dies lässt sich wie folgt begründen:

1. Angenommen, für ein Element $\mu \in G$ existieren zwei unterschiedliche reduzierte Darstellungen $\mu_1 \neq \mu_2$. Dann ließe sich durch die Verknüpfung $\omega = \mu_1 \cdot \mu_2^{-1}$ eine Darstellung des neutralen Elements konstruieren. Nach dem vollständigen Kürzen aller inversen Paare erhielte man ein reduziertes Wort ω_{red} , das nicht leer ist, da μ_1 und μ_2 verschieden waren. Dies ist im Widerspruch dazu, dass e nur durch das leere Wort repräsentiert wird.
2. Existiert umgekehrt eine nichttriviale reduzierte Darstellung des neutralen Elements, etwa $e = \omega$ mit $\omega \neq e$, so könnte man für jedes Element $\mu \in G$ durch $\mu' = \mu \cdot \omega$ eine weitere Darstellung finden. Da ω das neutrale Element repräsentiert, gilt im Sinne der Gruppe $\mu = \mu'$, obwohl die Wortgestalten (nach Reduktion) voneinander abweichen. Die Eindeutigkeit der Darstellung wäre somit aufgehoben.

Für den Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons ist diese Eigenschaft deshalb so fundamental, weil sie garantiert, dass die verschiedenen Wörter, die mit x_1 beginnen, im Vergleich zu jenen, die mit x_2 beginnen, disjunkt bleiben. Nur diese Trennung ermöglicht es, die Gruppe in paradoxe Teilstücke zu zerlegen:

Satz 6.14 (Paradoxie der freien Gruppe F_2 , vgl. [TW16], S. 5). *Jede freie Gruppe F_2 über einer zweielementigen Menge $S = \{x_1, x_2\}$ (Rang 2) ist paradox.*

Beweis. Seien x_1 und x_2 die freien Erzeuger von F_2 . Für ein beliebiges Element $s \in F_2$ bezeichne $W(s)$ die Menge aller reduzierten Wörter, die mit s beginnen. Zur Konstruktion der paradoxen Zerlegung unterteilen wir die Gruppe F_2 zunächst in paarweise disjunkte Teilmengen:

$$\begin{aligned} A_1 &:= W(x_1) \\ A_2 &:= W(x_1^{-1}) \\ B_1 &:= W(x_2) \cup \{e, x_2^{-1}, x_2^{-2}, \dots\} \\ B_2 &:= W(x_2^{-1}) \setminus \{x_2^{-1}, x_2^{-2}, \dots\} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass F_2 die disjunkte Vereinigung dieser Mengen ist. Um die Paradoxie nachzuweisen, zeigen wir nun, dass sowohl $A := A_1 \cup A_2$ als auch $B := B_1 \cup B_2$ jeweils äquizerlegbar zur gesamten Gruppe F_2 sind:

Wir betrachten die Menge $A_1 \cup x_1 A_2$. Sei $w \in F_2 \setminus A_1$ ein beliebiges reduziertes Wort. Da w nicht mit x_1 beginnt, ist das Wort $x_1^{-1}w$ ebenfalls reduziert und beginnt notwendig mit x_1^{-1} , liegt also in A_2 . Daraus folgt, dass $w = x_1(x_1^{-1}w)$ in der Bildmenge $x_1 A_2$ enthalten ist. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass jedes Wort, welches nicht in $x_1 A_2$ liegt, notwendigerweise in A_1 liegen muss. Somit rekonstruieren diese zwei Teile die gesamte Gruppe:

$$F_2 = A_1 \cup x_1 A_2.$$

Damit F_2 gilt: $A \sim_{F_2} F_2$.

Analog untersuchen wir die Wirkung von x_2 auf B_2 . Durch die Linksmultiplikation mit x_2 ergibt sich:

$$x_2 B_2 = x_2(W(x_2^{-1}) \setminus \{x_2^{-1}, x_2^{-2}, \dots\}) = x_2 W(x_2^{-1}) \setminus \{e, x_2^{-1}, x_2^{-2}, \dots\}.$$

Da $x_2 W(x_2^{-1})$ nach der Kürzung des ersten Buchstabens alle Wörter enthält, die nicht mit x_2^{-1} beginnen, führt die Vereinigung mit B_1 zu:

$$B_1 \cup x_2 B_2 = \underbrace{W(x_2) \cup \{e, x_2^{-1}, \dots\}}_{B_1} \cup \underbrace{(x_2 W(x_2^{-1}) \setminus \{e, x_2^{-1}, \dots\})}_{x_2 B_2}.$$

Dies vereinfacht sich zu $W(x_2) \cup x_2 W(x_2^{-1})$, was wiederum der gesamten Gruppe F_2 entspricht. Somit gilt auch $B \sim_{F_2} F_2$.

Da F die disjunkte Vereinigung der Mengen A und B ist und beide Mengen einzeln äquizerlegbar zu F_2 sind, folgt nach Definition, dass F_2 paradox ist. $\square$

Um zu zeigen, dass die Einheitssphäre S^2 paradox ist, reicht es nach 6.12 aus, eine paradoxe Gruppe zu finden, die fixpunktfrei auf S^2 operiert. Nun kann man zeigen, dass SO_3 eine freie Untergruppe vom Rang 2 hat, die nach 6.14 paradox ist. Dadurch ist SO_3 aber selbst paradox, denn jede Untergruppe operiert durch Linksmultiplikation fixpunktfrei auf der gesamten Gruppe, und daraus folgt mit 6.12 die Behauptung. Nun operiert SO_3 aber nicht fixpunktfrei auf S^2 , da jede von der Identität verschiedene Rotation aus genau zwei Fixpunkten hat (die Schnittpunkte der Rotationsachse mit S^2). Die Idee ist, zunächst eine Teilmenge von S^2 zu entfernen und es ergibt sich das Hausdorff-Paradoxon. Dafür zunächst aber zur freien Untergruppe von SO_3 :

Satz 6.15 (vgl. [Kir90], S. 7). *Die Gruppe SO_3 besitzt eine freie Untergruppe vom Rang 2.*

Beweis-Skizze. Betrachte die Rotationen $\alpha, \beta \in SO_3(\mathbb{R})$, die im Gegenuhrzeigersinn mit dem Winkel $\theta = \arccos(\frac{1}{3})$ um die z -Achse bzw. um die x -Achse drehen. In Matrixdarstellung lauten diese:

$$\alpha^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Man kann nun zeigen, dass die Einheitsmatrix keine nichttriviale Darstellung von reduzierten Wörtern, gebildet aus $\alpha^{\pm 1}$ und $\beta^{\pm 1}$ besitzt, womit die Gruppe $G := \langle \alpha, \beta \rangle \subseteq SO_3$ eine zur freien Gruppe F_2 isomorphe Untergruppe ist. Für einen vollen Beweis vgl. z.Bsp. [Kir90], S. 7ff.

Theorem 6.16 (Hausdorff-Paradoxon, vgl. [TW16], S. 17). *Es existiert eine abzählbare Teilmenge $D \subseteq S^2$, sodass die Menge $S^2 \setminus D$ eine SO_3 -paradoxe Menge ist.*

Beweis. Sei $G \subseteq SO_3$ die paradoxe Untergruppe, die in Satz 6.15 konstruiert wurde. G ist abzählbar, da die Menge aller endlichen Wörter über der endlichen Menge $S = \{\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}\}$ abzählbar ist.

Jede Rotation $g \in G \setminus \{id\}$ hat als Isometrie des $\mathbb{R}^3$ genau eine Drehachse und somit genau zwei Fixpunkte auf der Sphäre S^2 . Wir definieren D als die Menge aller Fixpunkte aller nichttrivialen Elemente von G :

$$D = \bigcup_{g \in G \setminus \{id\}} \{p \in S^2 \mid g(p) = p\}$$

Da G abzählbar ist und jedes $g \in G \setminus \{id\}$ höchstens zwei Fixpunkte besitzt, ist auch D abzählbar. Wir zeigen, dass der Stabilisator $St_G(p)$ für jedes $p \in S^2 \setminus D$ trivial ist.

Dies folgt direkt aus der Definition von D : Wäre $g(p) = p$ für ein $g \neq id$, so wäre p ein Fixpunkt und damit $p \in D$, was ein Widerspruch ist.

Da G auf $S^2 \setminus D$ fixpunktfrei operiert und G selbst eine paradoxe Gruppe ist, überträgt sich nach 6.12 die paradoxe Struktur von G auf die Menge $S^2 \setminus D$. Somit gilt:

$$S^2 \setminus D \text{ ist } G\text{-paradox und damit } SO_3\text{-paradox.}$$

□

Satz 6.17 (vgl. [Pet06], S. 11). *Die Einheitssphäre S^2 ist paradox bezüglich SO_3 .*

Beweis. Die Idee ist es hier, eine Rotation ψ zu finden, die die Menge D schrittweise verdrängt:

Wir wählen eine Gerade L durch den Ursprung, die keinen Punkt aus D enthält. Da D abzählbar ist, gibt es überabzählbar viele solcher Geraden. Nun betrachten wir Rotationen ψ_θ um diese Achse L mit dem Winkel θ . Ein Winkel θ ist ungeeignet, wenn es ein $n > 0$ gibt, sodass $\psi_{n\theta}(D) \cap D \neq \emptyset$. Da D abzählbar ist, gibt es nur abzählbar viele solcher kritischen Winkel. Wir wählen daher ein θ , das nicht in dieser Menge enthalten ist. Für unser gewähltes ψ gilt nun nach Konstruktion:

$$\psi^n(D) \cap D = \emptyset$$

für alle $n \geq 1$. Daraus folgt allgemein, dass alle Mengen in der Folge $D, \psi(D), \psi^2(D), \dots$ paarweise disjunkt sind. Wäre nämlich $\psi^n(D) \cap \psi^m(D) \neq \emptyset$ für $n > m$, so folgte durch Anwendung von ψ^{-m} , dass $\psi^{n-m}(D) \cap D \neq \emptyset$, was wir ausgeschlossen haben.

Wir fassen diese unendliche Kette von Mengen zu einer neuen Menge K zusammen:

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} \psi^n(D) = D \cup \psi(D) \cup \psi^2(D) \cup \dots$$

Es gilt die entscheidende Rekursion: $\psi(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi^n(D) = K \setminus D$. Wir können die gesamte Sphäre nun in zwei Teile zerlegen: den Teil K und den Rest $S^2 \setminus K$.

$$S^2 = K \cup (S^2 \setminus K)$$

Die Menge $S^2 \setminus D$ lässt sich identisch zerlegen, wenn wir K durch $\psi(K)$ ersetzen:

$$S^2 \setminus D = (K \setminus D) \cup (S^2 \setminus K) = \psi(K) \cup (S^2 \setminus K)$$

Da K durch die Rotation ψ kongruent zu $\psi(K)$ ist und der Rest $S^2 \setminus K$ identisch bleibt, sind S^2 und $S^2 \setminus D$ bezüglich SO_3 äquizerlegbar.

Um nun zu zeigen, dass S^2 paradox bezüglich SO_3 ist, wenden wir den zweiten Teil von Satz 6.8 an und setzen

$$U = S^2 \setminus D \quad \text{und} \quad V = S^2$$

und es folgt die Behauptung. □

Nachdem die Paradoxie der Einheitssphäre S^2 etabliert wurde, dehnen wir dieses Resultat nun auf den abgeschlossenen Einheitsball $\overline{B_1(0)} := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ aus:

Theorem 6.18 (Schwaches Banach-Tarski-Paradoxon, vgl. [Pet06], S. 11). *Jede abgeschlossene Kugel im $\mathbb{R}^3$ ist paradox bezüglich der Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$.*

Beweis. Zunächst führen wir einen Beweis für die Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$. Wir definieren die Projektion

$$\varphi : \overline{B_1(0)} \setminus \{0\} \rightarrow S^2, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}. \quad (6.14)$$

Für jedes $\psi \in SO_3$ gilt die Äquivarianz $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Denn: Sei $x \in \overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$ und $\psi \in SO(3)$. Unter Ausnutzung der Linearität von ψ folgt:

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot x \right) = \frac{1}{\|\psi(x)\|} \cdot \psi(x). \quad (6.15)$$

Betrachten wir die andere Komposition, so ergibt sich durch die Normerhaltung von ψ :

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \frac{\psi(x)}{\|\psi(x)\|} = \frac{\psi(x)}{\|x\|}. \quad (6.16)$$

Da S^2 bezüglich SO_3 -paradox ist (vgl. Satz 6.17), existieren somit paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq S^2$ sowie Rotationen $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in SO_3$, sodass gilt:

$$S^2 = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j. \quad (6.17)$$

Wir definieren nun die Urbildmengen in der punktierten Kugel als $A'_i := \varphi^{-1}(A_i)$ und $B'_j := \varphi^{-1}(B_j)$. Auch die Mengen $\{A'_1, \dots, A'_n, B'_1, \dots, B'_m\}$ sind paarweise disjunkt in $\overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$ sind. Unter Verwendung der Äquivarianz gilt:

$$\bigcup_{i=1}^n g_i A'_i = \bigcup_{i=1}^n g_i \varphi^{-1}(A_i) = \bigcup_{i=1}^n \varphi^{-1}(g_i A_i) = \varphi^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^n g_i A_i \right). \quad (6.18)$$

Da nach Konstruktion $\bigcup g_i A_i = S^2$ gilt, folgt:

$$\bigcup_{i=1}^n g_i A'_i = \varphi^{-1}(S^2) = \overline{B_1(0)} \setminus \{0\}. \quad (6.19)$$

Analoges ergibt sich für die zweite Teilmenge der Zerlegung. Somit ist $\overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$ paradox bezüglich SO_3 und damit erst recht bezüglich $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$. Um zu zeigen, dass auch die volle Kugel $\overline{B_1(0)}$ paradox ist, genügt es zu zeigen, dass $\overline{B_1(0)} \sim_{SO_3} \overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$. Sei $C \subseteq \overline{B_1(0)}$ ein Kreis, wobei $0 \in C$ und sei $C_0 := C \setminus \{0\}$. Wir betrachten die folgenden Zerlegungen:

$$\begin{aligned} \overline{B_1(0)} &= (\overline{B_1(0)} \setminus C) \cup C, \\ \overline{B_1(0)} \setminus \{0\} &= (\overline{B_1(0)} \setminus C) \cup C_0. \end{aligned}$$

Nach Beispiel 6.3 ist bekannt, dass $C \sim_{SO_3} C_0$ gilt. Da der Rest der Kugel $\overline{B_1(0)} \setminus C$ identisch bleibt, folgt:

$$\overline{B_1(0)} \sim_{SO_3} \overline{B_1(0)} \setminus \{0\}.$$

Da die Eigenschaft, paradox zu sein, invariant unter der Relation der Äquizerlegbarkeit ist (vgl. Satz 6.8), folgt aus der Paradoxie von $\overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$ die Paradoxie der abgeschlossenen Vollkugel $\overline{B_1(0)}$. Aufgrund der Translationsinvarianz der Isometriegruppe und da keine Einschränkung bezüglich des Radius vorliegt, ist die Behauptung für jede abgeschlossene Kugel im $\mathbb{R}^3$ gezeigt. $\square$

Bemerkung 6.19. Es ist hervorzuheben, dass der obige Beweis ein stärkeres Resultat liefert, als die Theoremstellung vermuten lässt: Da sowohl die Konstruktion der paradoxen Zerlegung auf der Sphäre als auch die Absorption des Ursprungs $\{0\}$ mittels der Rotation ψ ausschliesslich Elemente der SO_3 verwenden, ist die Vollkugel $\overline{B_1(0)}$ bereits paradox bezüglich der Rotationsgruppe SO_3 .

Definition 6.20 (vgl. [TW16], S. 26). Sei X eine Menge und G eine Gruppe, die auf X operiert, sowie Teilmengen $A, B \subseteq X$. Wir schreiben $A \preceq_G B$, falls A äquizerlegbar zu einer Teilmenge $B' \subseteq B$ ist.

Das folgende Theorem erlaubt uns zu zeigen, dass zwei Mengen äquizerlegbar sind, ohne explizit eine globale Bijektion angeben zu müssen; es genügt der Nachweis der gegenseitigen Einbettbarkeit.

Theorem 6.21 (Banach-Schröder-Bernstein, vgl. [TW16], S. 27). *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Für zwei Mengen $A, B \subseteq X$ gelte $A \preceq_G B$ und $B \preceq_G A$. Dann sind A und B äquizerlegbar ($A \sim_G B$).*

Beweis. Da $A \preceq_G B$ und $B \preceq_G A$ gelten, existieren nach Teil 1 von Satz 6.8 zwei injektive Abbildungen $\phi : A \rightarrow B$ und $\psi : B \rightarrow A$. Das Ziel ist es nun, A so in zwei disjunkte Bereiche U und U^c zu unterteilen, dass wir auf dem einen Teil mit ϕ und auf dem anderen mit ψ^{-1} arbeiten können, um eine vollständige Bijektion zwischen A und B zu erhalten.

Zunächst definieren wir:

$$W_0 := A \setminus \psi(B). \quad (6.20)$$

Durch wiederholte Anwendung der kombinierten Abbildung $\psi \circ \phi$ verfolgen wir diese Stellen weiter und definieren für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n := (\psi \circ \phi)^n(W_0). \quad (6.21)$$

Die Vereinigung all dieser Mengen bezeichnen wir als $W := \bigcup_{n=0}^{\infty} W_n$. Diese Menge W hat eine entscheidende Eigenschaft: Sie ist so konstruiert, dass das Bild von W unter ϕ genau mit dem Bereich korrespondiert, den wir für eine lückenlose Abbildung benötigen.

Wir definieren die Abbildung $h : A \rightarrow B$ nun wie folgt:

$$h(x) := \begin{cases} \phi(x) & \text{falls } x \in W \\ \psi^{-1}(x) & \text{falls } x \in W^c \cap A \end{cases} \quad (6.22)$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert. Für $x \in W$ ist $\phi(x)$ nach Definition von ϕ immer in B . Falls $x \notin W$, so liegt x insbesondere nicht in W_0 . Da W_0 gerade das Komplement des Bildes von ψ ist, muss x folglich im Bild $\psi(B)$ liegen, wodurch das Urbild $\psi^{-1}(x)$ existiert.

Die Abbildung h ist sogar bijektiv. Um dies einzusehen, konstruieren wir die Abbildung $k : B \rightarrow A$:

$$k(y) = \begin{cases} \phi^{-1}(y) & y \in \phi(W) \\ \psi(y) & y \in \psi^{-1}(W^c \cap A) \end{cases} \quad (6.23)$$

Aufgrund von $k \circ h = \text{id}_A$ und $h \circ k = \text{id}_B$ ist h somit bijektiv. Es gilt:

$$\psi^{-1}(W^c \cap A) = h(W^c \cap A) = h(A) \setminus h(W) = B \setminus h(W) = B \setminus \phi(W). \quad (6.24)$$

Nach Satz 6.8 folgt, dass $W^c \cap A \sim_G \psi^{-1}(W^c \cap A)$ und somit, dass $W^c \cap A \sim_G B \setminus \phi(W)$ gilt.

Wir haben also $(W^c \cap A) \cup W \sim_G (B \setminus \phi(W)) \cup \phi(W)$ und deshalb gilt $A \sim_G B$. $\square$

Im Folgenden verwenden wir $A \sim B$ statt $A \sim_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} B$ für Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$.

Theorem 6.22 (Starkes Banach-Tarski-Paradoxon). *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ beschränkte Teilmengen mit nichtleerem Inneren. Dann sind A und B äquizerlegbar bezüglich der Gruppe $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $A \preceq B$ gilt. Da A beschränkt ist, können wir eine abgeschlossene Kugel K mit hinreichend großem Radius wählen, sodass $A \subseteq K$. Da B ein nichtleeres Inneres besitzt, existiert ein $x \in B$ und ein $\epsilon > 0$, sodass die offene Kugel $L := B_\epsilon(x)$ vollständig in B enthalten ist. Da K kompakt und L offen ist, existiert für die Familie von Translaten $\{g \cdot L \mid g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)\}$ eine endliche Teilüberdeckung von K . Es gibt also $g_1, \dots, g_n \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$, sodass $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n g_i L$. Um hieraus eine Äquizerlegbarkeit zu konstruieren, definieren wir eine disjunkte Partition von K durch:

$$K_1 := g_1 L \cap K, \quad K_i := (g_i L \cap K) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} g_j L \quad \text{für } i = 2, \dots, n. \quad (6.25)$$

Nach Konstruktion ist $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Da für jedes i gilt $K_i \subseteq g_i L$, folgt $g_i^{-1} K_i \subseteq L$. Damit ist K äquizerlegbar zur Menge $K' := \bigcup_{i=1}^n g_i^{-1} K_i$, wobei K' eine Teilmenge einer disjunkten Vereinigung von n Kopien von L ist. Es gilt folglich $K \preceq \bigcup_{i=1}^n L_i$, wobei jedes L_i ein Translat von L bezeichnet mit $L_i \cap L_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Nach dem schwachen Banach-Tarski-Paradoxon ist die Kugel L paradox bezüglich $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$. Dies impliziert die Existenz einer Äquizerlegbarkeit $L \sim L_1 \cup L_2$. Mittels vollständiger Induktion lässt sich diese Eigenschaft auf jede endliche Anzahl $n \in \mathbb{N}$ erweitern:

$$L \sim \bigcup_{i=1}^n L_i \quad (6.26)$$

Das bedeutet, eine einzelne Kugel L kann in eine endliche Anzahl disjunkter Kopien ihrer selbst zerlegt werden. Wir führen die Teilergebnisse in einer Kette von Relationen zusammen:

$$A \subseteq K \preceq \bigcup_{i=1}^n L_i \sim L \subseteq B. \quad (6.27)$$

Da $\subseteq$ impliziert $\preceq$ und da die Relation $\preceq$ transitiv ist (da die Komposition stückweiser Isometrien wieder eine stückweise Isometrie ist), folgt $A \preceq B$.

Durch Vertauschen der Rollen von A und B folgt analog $B \preceq A$. Nach dem Banach-Schröder-Bernstein-Theorem resultiert daraus $A \sim B$. $\square$

Die Existenz des Paradoxons impliziert daher zwingend, dass die Zerlegungen Mengen enthalten müssen, die nicht Lebesgue-messbar sind. Da der Existenzbeweis jedoch mit dem Auswahlaxiom verknüpft ist und dieses ein reines Existenzpostulat ist, verweigert es per Definition jede konstruktive Angabe oder geometrische Bauanleitung für diese Mengen. Das Banach-Tarski-Paradoxon erweist sich damit als ein rein theoretisches Resultat der Mengenlehre, das für die empirische Realität und den täglichen Gebrauch keinerlei Gültigkeit besitzt (vgl. [Pet06], S. 15).

Die Übertragung auf höhere Dimensionen

Was geschieht nun für $d \geq 3$? Dazu wollen wir zunächst mittels Induktion nach der Dimension d beweisen, dass die Einheitssphäre S^d paradox bezüglich SO_{d+1} ist (vgl. [TW16], S. 78 f.):

Der Fall $d = 3$ ist in Satz 6.17 bewiesen. Als Nächstes betrachten wir den Induktionsschritt von $d - 1$ auf d . Wir nehmen an, dass die Sphäre S^{d-1} bereits paradox bezüglich ihrer Rotationsgruppe SO_d ist. Es gibt also eine Partition aus paarweise disjunkten Teilmengen $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m$ sowie eine Menge von Rotationen $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau_1, \dots, \tau_m \in SO_d$ gibt, für die gilt: $S^{d-1} = \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right)$, wobei die Anwendung der Rotationen auf die einzelnen Stücke zwei vollständige und identische Kopien der ursprünglichen Sphäre erzeugt: $S^{d-1} = \bigcup_{i=1}^k \sigma_i(A_i)$ und $S^{d-1} = \bigcup_{j=1}^m \tau_j(B_j)$. Wir schließen die Menge der Pole $P = \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$ zuerst aus.

Wir definieren hierzu eine radiale Projektionsabbildung $p : S^d \setminus P \rightarrow S^{d-1}$, die einen Punkt $x = (x_1, \dots, x_d, z)$ auf seine ersten d Komponenten projiziert und anschließend normiert:

$$p(x_1, \dots, x_d, z) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}}(x_1, \dots, x_d).$$

Da für alle Punkte auf der Sphäre außer den Polen gilt, dass $x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1 - z^2 > 0$, ist diese Abbildung auf $S^d \setminus P$ wohldefiniert. Wir nutzen nun diese Projektion, um die Mengen $A_i^* := p^{-1}(A_i)$ und $B_j^* := p^{-1}(B_j)$ zu definieren. Diese Mengen bilden eine disjunkte Zerlegung der punktierten Sphäre $S^d \setminus P$.

Im nächsten Schritt erweitern wir die Rotationen $\sigma_i \in SO_d$ zu neuen Rotationen $\sigma_i^* \in SO_{d+1}$, indem wir sie als Blockmatrizen auffassen, welche die z -Koordinate unverändert lassen.

$$\sigma_i^* = \begin{pmatrix} \sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt somit $\sigma_i^*(\mathbf{v}, z) = (\sigma_i \mathbf{v}, z)$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Da jede Rotation σ_i die euklidische Norm im $\mathbb{R}^d$ invariant lässt, gilt $\|\sigma_i \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$. Hieraus folgt:

$$p(\sigma_i^* x) = \frac{\sigma_i \mathbf{v}}{\|\sigma_i \mathbf{v}\|} = \frac{\sigma_i \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \sigma_i \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right) = \sigma_i p(x).$$

Diese Identität erlaubt es uns, das Verhalten der Mengen unter Rotation exakt zu bestimmen. Ein Punkt x liegt genau dann in der rotierten Menge $\sigma_i^* A_i^*$, wenn sein Urbild unter $p(x)$ in der rotierten Menge $\sigma_i A_i$ liegt. Denn es gilt:

$$\begin{aligned} x \in \sigma_i^* A_i^* &\iff (\sigma_i^*)^{-1} x \in A_i^* \\ &\iff p((\sigma_i^*)^{-1} x) \in A_i \\ &\iff \sigma_i^{-1}(p(x)) \in A_i \\ &\iff p(x) \in \sigma_i A_i \\ &\iff x \in p^{-1}(\sigma_i A_i) \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung, dass die Vereinigung der $\sigma_i A_i$ die gesamte S^{d-1} ergibt, folgt für die Vereinigung der höherdimensionalen Mengen:

$$\bigcup_{i=1}^k \sigma_i^* A_i^* = \bigcup_{i=1}^k p^{-1}(\sigma_i A_i) = p^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^k \sigma_i A_i \right) = p^{-1}(S^{d-1}) = S^d \setminus P.$$

Analoge Überlegungen gelten für die Mengen B_j^* und die Rotationen τ_j^* . Damit ist gezeigt, dass die punktierte Sphäre $S^d \setminus P$ paradox ist. Mit demselben Argument wie im Beweis von 6.17 kann gezeigt werden, dass $S^d \setminus P \sim_{SO_{d+1}} S^d$ gilt, wodurch wegen Teil 2 von Satz 6.8 folgt, dass S^d paradox ist. Nun können die Beweisführungen zum schwachen und starken Banach-Tarski Paradoxon übernommen werden.

Warum das Paradoxon in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ scheitert

Es stellt sich die Frage, ob dieses Resultat auch auf niedrigere Dimensionen übertragbar ist. Tatsächlich existiert das Paradoxon von Banach und Tarski nicht für $d \leq 2$, was durch das folgende Theorem von Banach verdeutlicht wird:

Theorem 6.23 (Banach 1923, vgl. [Dei26], S. 262 ff.). *Für $d \leq 2$ existiert ein Inhalt $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, der bewegungsinvariant, endlich additiv und auf dem Einheitsintervall normiert ist.*

Banachs Idee war es, das Lebesgue-Integral für eine bestimmte Menge von Funktionen fortzusetzen. Im folgenden Beweis orientieren wir uns für den eindimensionalen Fall an der Darstellung in [Dei26], für den zweidimensionalen Fall an der Originalarbeit von Stefan Banach (vgl. [Ban23]).

Konstruktion eines Inhalts im $\mathbb{R}$

Definition 6.24 (Banach-Funktional, vgl. [Dei26], S. 253). Sei W der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Periode 1. Für $f \in W$, $n \in \mathbb{N}$ und Verschiebungsvektoren $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$B_{y_1, \dots, y_n}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x + y_i) \quad (6.28)$$

Das **Banach-Funktional** $p : W \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch:

$$p(f) := \inf \{ B_{y_1, \dots, y_n}(f) \mid n \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} \} \quad (6.29)$$

Satz 6.25 (Hahn-Banach, vgl. [Dei26], S. 259). *Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Es sei $w : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf U und $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional auf V , für das gilt:*

$$w(f) \leq p(f) \quad \forall f \in U. \quad (6.30)$$

Dann existiert ein lineares Funktional $w^ : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit:*

$$(a) \quad w^*|_U = w,$$

$$(b) \quad w^*(f) \leq p(f) \quad \forall f \in V.$$

Definition 6.26 (Das Funktional ℓ , vgl. [Dei26], S. 255). Wir definieren den Raum W_L als die Menge aller Funktionen aus W , deren Einschränkung auf das Intervall $[0, 1[$ Lebesgue-integrierbar ist:

$$W_L := \{f \in W \mid f|_{[0,1[} \text{ ist Lebesgue-integrierbar}\}.$$

Für $f \in W_L$ definieren wir das lineare Funktional $\ell : W_L \rightarrow \mathbb{R}$ durch das Lebesgue-Integral:

$$\ell(f) := \int_0^1 f(x) d\lambda.$$

Um die Existenz einer Fortsetzung auf den gesamten Raum W zu sichern, greifen wir auf den Satz von Hahn-Banach zurück. Dieser erfordert jedoch, dass das betrachtete Funktional auf einem geeigneten Unterraum durch ein sublineares Funktional majorisiert wird. Im Folgenden wird nachgewiesen, dass das Lebesgue-Integral ℓ diese Bedingung in Bezug auf das Banach-Funktional p erfüllt:

Lemma 6.27. Für alle $f \in W_L$ gilt $\ell(f) \leq p(f)$ (vgl. [Dei26], S. 255)

Beweis. Sei $f \in W_L$. Da das Lebesgue-Integral über ein volles Periodenintervall translationsinvariant ist, gilt $\ell(f) = \ell(f + y)$ für alle Verschiebungen $y \in \mathbb{R}$. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ folgt aufgrund der Linearität von ℓ :

$$\ell(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(f + y_i) = \ell\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x + y_i)\right). \quad (6.31)$$

Setze $g(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x + y_i)$. Nach Definition von B gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(t + y_i) = B_{y_1, \dots, y_n}(f). \quad (6.32)$$

Da $g(x)$ durch die Konstante $c = B_{y_1, \dots, y_n}(f)$ nach oben beschränkt ist, folgt aus der Monotonie des Integrals:

$$\ell(g) = \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 B_{y_1, \dots, y_n}(f) dx = B_{y_1, \dots, y_n}(f). \quad (6.33)$$

Somit gilt $\ell(f) \leq B_{y_1, \dots, y_n}(f)$ für jede endliche Wahl von y_i . Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, folgt:

$$\ell(f) \leq \inf\{B_{y_1, \dots, y_n}(f) \mid n \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}\} = p(f). \quad (6.34)$$

□

Lemma 6.28. *Das Banach-Funktional $p : W \rightarrow \mathbb{R}$ ist sublinear (vgl. [Dei26], S. 253)*

Beweis. Zu (i): Sei $f \in W$ und $\alpha \geq 0$. Für beliebige Verschiebungen $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ gilt aufgrund der Linearität des Supremums:

$$B_{y_1, \dots, y_n}(\alpha f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha f(x + y_i) = \alpha \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x + y_i) = \alpha B_{y_1, \dots, y_n}(f). \quad (6.35)$$

Durch Übergang zum Infimum über alle $n \in \mathbb{N}$ und $y_i \in \mathbb{R}$ folgt unmittelbar $p(\alpha f) = \alpha p(f)$.

Zu (ii): Seien $f, g \in W$. Um die Subadditivität zu zeigen, wählen wir zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ Verschiebungen $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ und $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{R}$ derart, dass:

$$B_{y_1, \dots, y_n}(f) \leq p(f) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad B_{z_1, \dots, z_m}(g) \leq p(g) + \frac{\epsilon}{2}. \quad (6.36)$$

Wir betrachten nun $n \cdot m$ Verschiebungen, die durch alle möglichen Summen $w_{i,j} := y_i + z_j$ mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ gegeben sind. Nach Definition von p gilt:

$$p(f + g) \leq B_{w_{1,1}, \dots, w_{n,m}}(f + g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (f + g)(x + y_i + z_j). \quad (6.37)$$

Unter Verwendung der Subadditivität des Supremums erhalten wir:

$$\begin{aligned} p(f + g) &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x + z_j + y_i) \right) + \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m g(x + y_i + z_j) \right) \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x + z_j + y_i) \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m g(x + y_i + z_j) \right). \end{aligned}$$

Da das Supremum über $x \in \mathbb{R}$ invariant gegenüber einer festen Translation z_j bzw. y_i ist, reduziert sich dies zu:

$$p(f + g) \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m B_{y_1, \dots, y_n}(f) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_{z_1, \dots, z_m}(g) = B_{y_1, \dots, y_n}(f) + B_{z_1, \dots, z_m}(g). \quad (6.38)$$

Einsetzen der obigen Schranken liefert $p(f + g) \leq p(f) + p(g) + \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung. $\square$

Da W_L einen Unterraum von W bildet, garantiert der Satz von Hahn-Banach die Existenz einer (nicht unbedingt eindeutigen) linearen Fortsetzung $L : W \rightarrow \mathbb{R}$, für die $L|_{W_L} = \ell$ gilt. Jede derartige

Fortsetzung L induziert nun einen (noch nicht notwendig bewegungsinvarianten) Inhalt μ_L auf der Potenzmenge $\mathcal{P}([0, 1])$ durch die Vorschrift (vgl. [Dei26], S. 260):

$$\mu_L(A) := L(\chi_{A^*}), \quad (6.39)$$

wobei $A^* := \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} (A + z)$ die periodische Fortsetzung der Menge $A \subseteq [0, 1]$ auf ganz $\mathbb{R}$ bezeichnet. Die charakteristische Funktion χ_{A^*} ist nach Konstruktion ein Element des Vektorraums W .

Lemma 6.29 (Translationsinvarianz von L , vgl. [Dei26], S. 261). *Die Hahn-Banach-Fortsetzung $L : W \rightarrow \mathbb{R}$ ist translationsinvariant, d. h. für alle $f \in W$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt $L(f(\cdot + y)) = L(f)$.*

Beweis. Sei $f \in W$ und $y \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Differenzfunktion $g(x) := f(x + y) - f(x)$. Nach den Eigenschaften der Hahn-Banach-Fortsetzung gilt die Einschließung:

$$-p(-g) \leq L(g) \leq p(g). \quad (6.40)$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $p(g) \leq 0$ und $p(-g) \leq 0$. Wir wählen für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Verschiebungsvektoren $y_i := (i - 1)y$ für $i = 1, \dots, n$. Es ergibt sich dann eine Teleskopsumme:

$$B_{y_1, \dots, y_n}(g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x + iy) - f(x + (i - 1)y)) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{f(x + ny) - f(x)}{n}. \quad (6.41)$$

Da f nach Voraussetzung beschränkt ist (sei $|f(x)| \leq K$ für ein $K \in \mathbb{R}$), folgt:

$$B_{y_1, \dots, y_n}(g) \leq \frac{2K}{n}. \quad (6.42)$$

Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt durch den Übergang zum Infimum $p(g) \leq 0$. Analog lässt sich $p(-g) \leq 0$ zeigen. Daraus folgt $L(g) = 0$, was gleichbedeutend mit $L(f(\cdot + y)) = L(f)$ ist. $\square$

Nun folgt:

$$\mu_L(A + y) = L(\chi_{A+y}) = L(\chi_A(\cdot - y)) = L(\chi_A) = \mu_L(A). \quad (6.43)$$

Aus dem Funktional L konstruieren wir noch ein $\tilde{L}$, das invariant unter Spiegelungen ist:

Definition 6.30 (Symmetrisierung des Funktional, vgl. [Dei26], S. 261). Für die Hahn-Banach Fortsetzung $L : W \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir das symmetrisierte Funktional $\tilde{L} : W \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$\tilde{L}(f) := \frac{L(f) + L(f \circ \text{sp})}{2}, \quad (6.44)$$

wobei $\text{sp} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -x$ die Spiegelung am Nullpunkt bezeichnet. Dieses ist invariant unter der gesamten Isometriegruppe von $\mathbb{R}$.

Beweis. Die Linearität von $\tilde{L}$ folgt unmittelbar aus der Linearität der Fortsetzung L . Die weiteren Eigenschaften ergeben sich wie folgt:

(i) Fortsetzungseigenschaft: Es gilt für alle $f \in W_L$, dass $\ell(f \circ \text{sp}) = \ell(f)$. Somit folgt:

$$\tilde{L}(f) = \frac{L(f) + L(f \circ \text{sp})}{2} = \frac{\ell(f) + \ell(f)}{2} = \ell(f). \quad (6.45)$$

(ii) Spiegelungsinvarianz: Unter Verwendung der Identität $\text{sp}(\text{sp}(x)) = x$ ergibt sich:

$$\tilde{L}(f \circ \text{sp}) = \frac{L(f \circ \text{sp}) + L(f \circ \text{sp} \circ \text{sp})}{2} = \frac{L(f \circ \text{sp}) + L(f)}{2} = \tilde{L}(f). \quad (6.46)$$

(iii) Da L nach Lemma 6.29 $L(f(\cdot + y)) = L(f)$ gilt, folgt:

$$\tilde{L}(f(\cdot + y)) = \frac{L(f(\cdot + y)) + L(f(\text{sp}(\cdot + y)))}{2} = \frac{L(f) + L(f \circ \text{sp})}{2} = \tilde{L}(f). \quad (6.47)$$

Folglich ist $\tilde{L}$ invariant unter der gesamten Isometriegruppe von $\mathbb{R}$. $\square$

Wir nutzen das symmetrisierte Funktional $\tilde{L} : W \rightarrow \mathbb{R}$, um zunächst für Teilmengen $A \subseteq [0, 1[$ einen normierten Inhalt durch $\mu_{\tilde{L}}(A) := \tilde{L}(\chi_{A^*})$ zu definieren.

Um den Inhalt m auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ zu erweitern, nutzen wir eine Zerlegung von $\mathbb{R}$ in halboffene Einheitsintervalle:

$$m(B) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_{\tilde{L}}((B \cap [k, k+1[) - k) \quad \text{für } B \subseteq \mathbb{R}. \quad (6.48)$$

Hierbei bewirkt der Term $-k$ die Rückverschiebung des jeweiligen Mengenstücks in das Grundintervall $[0, 1[$. Wir prüfen die geforderten Eigenschaften:

Zunächst zur endlichen Additivität: Da $\tilde{L}$ ein lineares Funktional ist, ist $\mu_{\tilde{L}}$ auf $\mathcal{P}([0, 1[)$ nach Konstruktion endlich additiv. Da die Summe über $k \in \mathbb{Z}$ für disjunkte Mengen $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}$ gliedweise addiert wird, überträgt sich die endliche Additivität direkt auf m .

Die Invarianz gegenüber Spiegelungen folgt aus der Symmetrisierung des Funktional $\tilde{L}$. Die Invarianz gegenüber beliebigen Translationen $y \in \mathbb{R}$ folgt aus Definition 6.30, Teil (iii). Eine Verschiebung von B um y führt lediglich zu einer Umordnung der Summanden und einer Verschiebung innerhalb des periodischen Funktional $\tilde{L}$, welche dessen Wert unberührt lässt.

Für das Einheitsintervall $I = [0, 1[$ ergibt sich $m(I) = \mu_{\tilde{L}}(I) = \tilde{L}(\chi_{I^*})$. Da die charakteristische Funktion χ_{I^*} Lebesgue-integrierbar ist, gilt $\tilde{L}(\chi_{I^*}) = \ell(\chi_{I^*}) = 1$.

Damit ist m ein bewegungsinvarianter, endlich additiver und normierter Inhalt auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Konstruktion eines Inhalts im $\mathbb{R}^2$

Im Folgenden orientieren wir uns an der Darstellung in (vgl. [Ban23], S. 31 ff.) Das ursprüngliche Funktional $\tilde{L}$ ist auf dem Raum W der 1-periodischen beschränkten Funktionen definiert. Um Mengen in der Ebene zu messen, erweitern wir dieses zunächst auf die gesamte reelle Achse.

Für eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit beschränktem Träger definieren wir die Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ durch Summation über die ganzzahligen Verschiebungen:

$$\tilde{L}_{\mathbb{R}}(f) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{L}(x \mapsto f(x+k) \cdot \chi_{[0,1)}(x)) \quad (6.49)$$

Da f einen beschränkten Träger besitzt, ist dies eine endliche Summe. Für messbare Funktionen f folgt aus der Invarianz und der Definition von $\tilde{L}$:

$$\tilde{L}_{\mathbb{R}}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (6.50)$$

Damit fungiert $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ als universelles Integral auf der gesamten Geraden. Um die Rotationsinvarianz des Inhalts in der Ebene sicherzustellen, definieren wir die Anwendung des Funktional $\tilde{L}$ auf Funktionen $\phi : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$. Da $\tilde{L}$ ursprünglich auf dem Raum W der 1-periodischen Funktionen definiert ist, nutzen wir die Skalierungsabbildung:

$$\psi : [0, 1) \rightarrow [0, 2\pi), \quad s \mapsto 2\pi s. \quad (6.51)$$

Das Funktional $\tilde{L}$ wird auf den Winkelraum übertragen, indem wir die Funktion ϕ mit ψ komponieren:

$$\tilde{L}_{\text{Winkel}}(\phi) := \tilde{L}(\phi \circ \psi) = \tilde{L}(s \mapsto \phi(2\pi s)). \quad (6.52)$$

Aufbauend auf dem translations- und spiegelungsinvarianten Funktional $\tilde{L}$ konstruieren wir nun ein Funktional H auf dem Raum der beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit beschränktem Träger. Ziel ist es, ein Funktional zu definieren, das invariant unter der gesamten Bewegungsgruppe der Ebene ist.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit beschränktem Träger E . Wir definieren $H(f)$ durch eine dreistufige Anwendung von $\tilde{L}$: Für jeden Winkel $\xi \in [0, 2\pi)$ betrachten wir die gedrehte Funktion f_{ξ} , definiert durch:

$$f_{\xi}(x, y) := f(\mu_{\xi}(x, y)^T) \quad (6.53)$$

wobei μ_{ξ} die Rotationsmatrix bezeichnet, die einen Vektor um den Winkel ξ gegen den Uhrzeigersinn dreht. Geometrisch entspricht dies einer Drehung des Graphen von f um ξ im Uhrzeigersinn.

Für ein festes $x \in \mathbb{R}$ wenden wir das globale Funktional $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ auf die Schnitte in y -Richtung an:

$$g_{\xi}(x) := \tilde{L}_{\mathbb{R}}(y \mapsto f_{\xi}(x, y)) \quad (6.54)$$

Wir fassen diese Linien-Inhalte durch erneute Anwendung von $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ zu einem Gesamtwert für den gewählten Winkel ξ zusammen:

$$\phi(\xi) := \tilde{L}_{\mathbb{R}}(x \mapsto g_{\xi}(x)) \quad (6.55)$$

Der Wert $\phi(\xi)$ repräsentiert den Inhalt der Funktion aus der Blickrichtung ξ .

Um die Rotationsinvarianz sicherzustellen, mitteln wir die Funktion $\phi(\xi)$ über den gesamten Winkelraum $[0, 2\pi)$:

$$H(f) := \tilde{L}_{\text{Winkel}}(\phi) = \tilde{L}(s \mapsto \phi(2\pi s)) \quad (6.56)$$

Die Invarianz von H gegenüber der Isometriegruppe des $\mathbb{R}^2$ ergibt sich nun aus den Eigenschaften von $\tilde{L}$:

- **Translationsinvarianz** Das durch iterative Anwendung von $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ und $\tilde{L}_{\text{Winkel}}$ definierte Funktional H ist invariant gegenüber allen Translationen im $\mathbb{R}^2$. Das heißt, für jedes $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit beschränktem Träger und jeden Verschiebungsvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ gilt mit $f_{\vec{v}}(\vec{x}) := f(\vec{x} + \vec{v})$ die Identität $H(f_{\vec{v}}) = H(f)$:

Sei $\vec{v} = (a, b)^T \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Translationsvektor. Wir untersuchen die Wirkung dieser Verschiebung sukzessive entlang der Konstruktionsschritte von H :

Für einen festen Winkel $\xi \in [0, 2\pi)$ betrachten wir die gedrehte Funktion $(f_{\vec{v}})_{\xi}$. Unter Ausnutzung der Linearität der Rotationsmatrix μ_{ξ} gilt für einen Punkt $\vec{x} = (x, y)^T$:

$$(f_{\vec{v}})_{\xi}(\vec{x}) = f_{\vec{v}}(\mu_{\xi}\vec{x}) = f(\mu_{\xi}\vec{x} + \vec{v}).$$

Wir definieren $\vec{v}_{\xi} := \mu_{\xi}^{-1}\vec{v} =: (x_{\xi}, y_{\xi})^T$ als den im Bezugssystem ξ gedrehten Verschiebungsvektor. Es folgt:

$$(f_{\vec{v}})_{\xi}(x, y) = f(\mu_{\xi}\vec{x} + \mu_{\xi}\vec{v}_{\xi}) = f(\mu_{\xi}(\vec{x} + \vec{v}_{\xi})) = f_{\xi}(x + x_{\xi}, y + y_{\xi}).$$

Die Translation in der Ebene manifestiert sich also für jeden Winkel ξ als eine Koordinatenverschiebung innerhalb der Funktion f_{ξ} .

Wir wenden das globale Funktional $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ auf die y -Schnitte an. Aufgrund der nach Konstruktion gegebenen Translationsinvarianz von $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ ergibt sich für ein festes $x \in \mathbb{R}$:

$$g_{\vec{v}, \xi}(x) = \tilde{L}_{\mathbb{R}}(y \mapsto f_{\xi}(x + x_{\xi}, y + y_{\xi})) = \tilde{L}_{\mathbb{R}}(y \mapsto f_{\xi}(x + x_{\xi}, y)) = g_{\xi}(x + x_{\xi}).$$

Die vertikale Verschiebungskomponente y_{ξ} wird durch $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ vollständig eliminiert.

In der zweiten Iterationsstufe wenden wir $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ auf die resultierende Funktion $g_{\vec{v}, \xi}$ bezüglich der x -Variable an. Erneut gilt aufgrund der Translationsinvarianz von $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$:

$$\phi_{\vec{v}}(\xi) = \tilde{L}_{\mathbb{R}}(x \mapsto g_{\xi}(x + x_{\xi})) = \tilde{L}_{\mathbb{R}}(x \mapsto g_{\xi}(x)) = \phi(\xi).$$

Dies zeigt, dass für jeden beliebig gewählten Winkel ξ der berechnete Flächenwert $\phi(\xi)$ invariant gegenüber der ursprünglichen Translation $\vec{v}$ ist.

Da die Identität $\phi_{\vec{v}}(\xi) = \phi(\xi)$ punktweise für alle $\xi \in [0, 2\pi)$ erfüllt ist, folgt für das finale Winkelmittel:

$$H(f_{\vec{v}}) = \tilde{L}_{\text{Winkel}}(\phi_{\vec{v}}) = \tilde{L}_{\text{Winkel}}(\phi) = H(f).$$

- **Rotationsinvarianz:** Sei $\theta \in [0, 2\pi)$ ein beliebiger Rotationswinkel und f_{θ} die durch $f_{\theta}(\vec{x}) := f(\mu_{\theta}\vec{x})$ definierte, gedrehte Funktion.

Für jeden Winkel $\xi \in [0, 2\pi)$ betrachten wir die Richtungsfunktion $\phi_{\theta}(\xi)$. Nach Definition der Drehung gilt:

$$(f_{\theta})_{\xi}(\vec{x}) = f_{\theta}(\mu_{\xi}\vec{x}) = f(\mu_{\theta}\mu_{\xi}\vec{x}) = f(\mu_{\theta+\xi}\vec{x}) = f_{\theta+\xi}(\vec{x}).$$

Daraus resultiert:

$$\phi_{\theta}(\xi) = \phi(\xi + \theta).$$

Dies zeigt, dass eine Rotation der Ausgangsfunktion lediglich zu einer Translation der Richtungsfunktion ϕ im Argument führt. Setzen wir dies in die Definition von H ein, erhalten wir:

$$H(f_{\theta}) = \tilde{L}_{\text{Winkel}}(\phi_{\theta}) = \tilde{L}(s \mapsto \phi_{\theta}(2\pi s)) = \tilde{L}(s \mapsto \phi(2\pi s + \theta)).$$

Wir nutzen nun die Translationsinvarianz von $\tilde{L}$ auf dem Raum W der 1-periodischen Funktionen. Es folgt:

$$\tilde{L}(s \mapsto \phi(2\pi(s + \frac{\theta}{2\pi}))) = \tilde{L}(s \mapsto \phi(2\pi s)) = H(f).$$

- **Spiegelungsinvarianz:**

Zuletzt zeigen wir die Invarianz von H unter Spiegelungen an der x -Achse. Sei f_{sp_x} die gespiegelte Funktion, definiert durch $f_{sp_x}(x, y) := f(x, -y)$. Für jeden Winkel ξ folgt aus der geometrischen Betrachtung, dass die Funktion $(f_{sp_x})_{-\xi}$ durch eine Spiegelung der y -Koordinaten aus f_{ξ} hervorgeht.

Aufgrund der Spiegelungsinvarianz von $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ gilt:

$$g_{sp_x, -\xi}(x) = \tilde{L}_{\mathbb{R}}(y \mapsto f_{sp_x, -\xi}(x, y)) = \tilde{L}_{\mathbb{R}}(y \mapsto f_{\xi}(x, -y)) = g_{\xi}(x).$$

Daraus ergibt sich $\phi_{sp_x}(-\xi) = \phi(\xi)$ bzw. $\phi_{sp_x}(\xi) = \phi(-\xi)$. Für das Funktional H folgt:

$$H(f_{sp_x}) = \tilde{L}(s \mapsto \phi_{sp_x}(2\pi s)) = \tilde{L}(s \mapsto \phi(-2\pi s)).$$

Da das Funktional $\tilde{L}$ auf dem Raum W invariant unter Spiegelung des Arguments ($s \mapsto -s$) ist, folgt:

$$H(f_{sp_x}) = \tilde{L}(s \mapsto \phi(2\pi s)) = H(f).$$

Da jede Isometrie der Ebene durch Kombination von Translationen, Rotationen und der Spiegelung sp_x erzeugt werden kann, ist die Invarianz von H unter der gesamten Bewegungsgruppe bewiesen.

Wir weisen nun nach, dass das Funktional H für jede Lebesgue-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2$ übereinstimmt.

Sei f eine messbare, beschränkte Funktion mit beschränktem Träger. Wir betrachten die sukzessiven Schritte der Konstruktion von H :

Für einen festen Winkel ξ ist die gedrehte Funktion f_ξ ebenfalls messbar. Nach dem Satz von Fubini ist für fast alle $x \in \mathbb{R}$ die Schnittfunktion $y \mapsto f_\xi(x, y)$ messbar. Da das Funktional $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ eine Fortsetzung des eindimensionalen Lebesgue-Integrals ist, gilt für diese x :

$$g_\xi(x) = \tilde{L}_{\mathbb{R}}(y \mapsto f_\xi(x, y)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x, y) dy.$$

Die Konvergenz des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x, y) dy$ ist durch die Voraussetzungen an f sichergestellt. Da f einen beschränkten Träger $E \subseteq \mathbb{R}^2$ besitzt, existiert ein Radius $R > 0$, sodass $f(\vec{z}) = 0$ für alle $\|\vec{z}\| > R$. Da die Rotationsmatrix μ_ξ eine Isometrie darstellt, gilt $\|\mu_\xi \vec{x}\| = \|\vec{x}\|$. Somit hat auch f_ξ einen beschränkten Träger, da $f_\xi(\vec{x}) = f(\mu_\xi \vec{x}) = 0$, sobald $\|\vec{x}\| > R$. Für ein festes x ist der Integrationsbereich somit auf ein Intervall $I_x \subseteq [-R, R]$ beschränkt. Zusammen mit der vorausgesetzten Beschränktheit von f (sei $|f| \leq M$) folgt:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x, y) dy \right| = \left| \int_{I_x} f_\xi(x, y) dy \right| \leq \int_{-R}^R M dy = 2RM < \infty.$$

Damit ist $g_\xi(x)$ für jedes x wohldefiniert und ebenfalls eine beschränkte Funktion mit beschränktem Träger in $\mathbb{R}$, was die erneute Anwendung von $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ im nächsten Schritt legitimiert.

Die Funktion $g_\xi(x)$ stellt somit fast überall das Integral über die vertikalen Schnitte dar. Durch erneute Anwendung von $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$ folgt:

$$\phi(\xi) = \tilde{L}_{\mathbb{R}}(g_\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x, y) dy dx.$$

Es gilt nun für jeden Winkel ξ :

$$\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f_\xi d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2.$$

Denn: Nach Definition gilt $f_\xi(\vec{x}) = f(\mu_\xi \vec{x})$. Der Transformationssatz für das Lebesgue-Integral besagt für eine bijektive, differenzierbare Abbildung Φ (vgl. [Kir26], S. 485):

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(\vec{z}) d\lambda^2(\vec{z}) = \int_{\Omega} f(\Phi(\vec{x})) \cdot |\det(D\Phi(\vec{x}))| d\lambda^2(\vec{x}).$$

In unserem Fall wählen wir $\Phi(\vec{x}) = \mu_\xi \vec{x}$. Da μ_ξ eine lineare Abbildung ist, entspricht ihre Jacobi-Matrix $D\Phi$ der Matrix μ_ξ selbst. Für die Determinante einer Rotationsmatrix gilt:

$$\det(\mu_\xi) = \cos^2 \xi - (-\sin^2 \xi) = \cos^2 \xi + \sin^2 \xi = 1.$$

Da μ_ξ den gesamten $\mathbb{R}^2$ bijektiv auf sich selbst abbildet ($\Phi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$), folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{z}) d\lambda^2(\vec{z}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mu_\xi \vec{x}) \cdot |1| d\lambda^2(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} f_\xi(\vec{x}) d\lambda^2(\vec{x}).$$

Somit ist der Wert des Integrals über den gesamten Raum unabhängig vom Rotationswinkel ξ , woraus $\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2$ für alle $\xi \in [0, 2\pi)$ folgt.

Da der Wert $\phi(\xi)$ somit für alle ξ konstant ist, folgt:

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2.$$

Damit ist gezeigt, dass H eine bewegungsinvariante Fortsetzung des Lebesgue-Integrals auf den Raum aller beschränkten Funktionen mit beschränktem Träger im $\mathbb{R}^2$ darstellt.

Wir definieren den Inhalt m_2 für eine beliebige Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^2$ einheitlich durch die Ausschöpfung mit abgeschlossenen Kreisscheiben $B_n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| \leq n\}$:

$$m_2(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} H(\chi_{E \cap B_n}). \quad (6.57)$$

Da die Indikatorfunktion $\chi_{E \cap B_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen beschränkten Träger besitzt, ist der Ausdruck im Limes durch das Funktional H stets wohldefiniert. Diese Definition deckt sowohl beschränkte Mengen als auch unbeschränkte Mengen ab.

Im Folgenden wird nachgewiesen, dass m_2 tatsächlich additiv, bewegungsinvariant und normiert ist bezüglich $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Die Grundlage hierfür bilden die bereits hergeleiteten Eigenschaften des Funktional H , welche durch den Grenzwertprozess auf beliebige Mengen übertragen werden.

Da das Funktional H als iterative Anwendung des durch das Banach-Funktional p majorisierten Funktional $\tilde{L}$ konstruiert wurde, folgt $H(f) \geq 0$ für $f \geq 0$. Da der Grenzwert einer Folge nichtnegativer Werte im erweiterten Sinne stets nichtnegativ ist, folgt unmittelbar $m_2(E) \geq 0$.

Die endliche Additivität von m_2 ergibt sich aus der Linearität des Funktional H . Seien A und B zwei disjunkte Teilmengen der Ebene. Für jede Kreisscheibe B_n gilt aufgrund der Disjunktheit die Identität $\chi_{(A \cup B) \cap B_n} = \chi_{A \cap B_n} + \chi_{B \cap B_n}$. Da H linear ist, lässt sich der Ausdruck zu $H(\chi_{A \cap B_n}) + H(\chi_{B \cap B_n})$ aufspalten. Unter Anwendung der Grenzwertsätze folgt $m_2(A \cup B) = m_2(A) + m_2(B)$.

Hinsichtlich der Bewegungsinvarianz nutzen wir die zuvor bewiesene Invarianz des Funktional H unter Isometrien σ der Ebene ($H(f \circ \sigma) = H(f)$). Sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige Menge und σ eine Isometrie der Ebene. Nach Definition gilt:

$$m_2(\sigma(E)) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\chi_{\sigma(E) \cap B_n}).$$

Unter Verwendung der Identität $\chi_{\sigma(E) \cap B_n} = \chi_{\sigma(E \cap \sigma^{-1}(B_n))} = \chi_{E \cap \sigma^{-1}(B_n)} \circ \sigma^{-1}$ folgt:

$$H(\chi_{\sigma(E) \cap B_n}) = H(\chi_{E \cap \sigma^{-1}(B_n)} \circ \sigma^{-1}) = H(\chi_{E \cap \sigma^{-1}(B_n)}).$$

Für das Urbild der Kreisscheibe B_n unter σ existiert daher ein $d = \|\sigma^{-1}(\vec{0})\|$, sodass für alle $\vec{x} \in \sigma^{-1}(B_n)$ gilt: $\|\vec{x}\| \leq n + d$. Somit erhalten wir für alle $n \geq d$ die Mengeninklusionen:

$$B_{n-d} \subseteq \sigma^{-1}(B_n) \subseteq B_{n+d}.$$

Aufgrund der Monotonie des Funktional H (da $\chi_{E \cap B_{n-d}} \leq \chi_{E \cap \sigma^{-1}(B_n)} \leq \chi_{E \cap B_{n+d}}$) gilt:

$$H(\chi_{E \cap B_{n-d}}) \leq H(\chi_{E \cap \sigma^{-1}(B_n)}) \leq H(\chi_{E \cap B_{n+d}}).$$

Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ konvergieren sowohl die linke als auch die rechte Seite gegen $m_2(E)$. Nach dem Sandwich-Theorem folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(\chi_{E \cap \sigma^{-1}(B_n)}) = m_2(E).$$

Damit ist $m_2(\sigma(E)) = m_2(E)$ für jede Isometrie σ bewiesen.

Zuletzt ist m_2 normiert. Wie gezeigt wurde, stimmt H für Lebesgue-messbare Funktionen mit dem Lebesgue-Integral überein, woraus

$$m_2([0, 1]^2) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{[0, 1]^2} d\lambda^2 = 1 \quad (6.58)$$

folgt. Damit ist m_2 als normierter, bewegungsinvarianter und endlich additiver Inhalt auf der gesamten Ebene $\mathbb{R}^2$ identifiziert.

Folgerung: Die Unmöglichkeit der Paradoxie in Dimension $d \leq 2$

Aus der Existenz des in den vorangegangenen Abschnitten konstruierten Inhalts m_d lässt sich unmittelbar folgern, dass paradoxe Zerlegungen nach Banach-Tarski in den Dimensionen $d = 1$ und $d = 2$ ausgeschlossen sind:

Satz 6.31 (Nichtexistenz paradoxer Mengen im $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$). *Sei $d \in \{1, 2\}$. Es existiert keine beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $m_d(A) > 0$, die paradox bezüglich der Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{R}^d)$ ist.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen, es existiere eine paradoxe Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $0 < m_d(A) < \infty$. Es würden also paarweise disjunkte Teilmengen $S_1, \dots, S_n, T_1, \dots, T_m \subseteq A$ existieren, deren Vereinigung A bildet:

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^n S_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m T_j \right), \quad (6.59)$$

sowie Isometrien $\phi_1, \dots, \phi_n$ und $\psi_1, \dots, \psi_m \in \text{Isom}(\mathbb{R}^d)$, sodass gilt:

$$A = \bigcup_{i=1}^n \phi_i(S_i) \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{j=1}^m \psi_j(T_j). \quad (6.60)$$

Unter Ausnutzung der endlichen Additivität des Inhalts m_d folgt aus der ersten Zerlegung:

$$m_d(A) = \sum_{i=1}^n m_d(S_i) + \sum_{j=1}^m m_d(T_j). \quad (6.61)$$

Aufgrund der Bewegungsinvarianz von m_d gilt für alle Isometrien $m_d(\phi_i(S_i)) = m_d(S_i)$ und $m_d(\psi_j(T_j)) = m_d(T_j)$. Da die Bildmengen in den paradoxen Kopien von A ebenfalls disjunkt sind, folgt:

$$m_d(A) = m_d\left(\bigcup_{i=1}^n \phi_i(S_i)\right) = \sum_{i=1}^n m_d(\phi_i(S_i)) = \sum_{i=1}^n m_d(S_i) \quad (6.62)$$

und analog

$$m_d(A) = m_d\left(\bigcup_{j=1}^m \psi_j(T_j)\right) = \sum_{j=1}^m m_d(T_j). \quad (6.63)$$

Einsetzen dieser Identitäten in die Gleichung der Gesamtmenge liefert:

$$m_d(A) = m_d(A) + m_d(A) = 2 \cdot m_d(A). \quad (6.64)$$

Da $m_d(A) > 0$ und $m_d(A) < \infty$ vorausgesetzt wurde, folgt durch Division der Widerspruch $1 = 2$. Somit kann eine solche paradoxe Menge in Dimensionen, in denen ein bewegungsinvarianter Inhalt auf der gesamten Potenzmenge existiert, nicht existieren. $\square$

7 Ausblick

Das Zusammenspiel von Maßtheorie, Topologie und Axiomatik offenbart bei genauerer Betrachtung ein faszinierendes mathematisches Spannungsverhältnis: Während Dougherty und Foreman zeigen, dass der Raum bereits in einer reinen ZF-Welt eine tiefgreifende topologische Instabilität besitzt, beweist Robert Solovay auf der anderen Seite, dass ohne das Auswahlaxiom fundamentale maßtheoretische Pathologien unbeweisbar bleiben. Die folgenden Abschnitte beleuchten diese beiden gegensätzlichen Facetten.

Topologische Paradoxien ohne Auswahlaxiom

Ein bemerkenswerter Aspekt zum Banach-Tarski-Paradoxon ist die Frage, inwieweit die geometrische Instabilität des Raumes zwingend an das Auswahlaxiom gebunden ist. Während die klassische, punktweise Zerlegung nach Banach und Tarski ohne das Auswahlaxiom nicht konstruierbar ist, existieren Varianten, die rein mit offenen Mengen operieren.

In Anlehnung an die Darstellung bei [Dei26] lässt sich hierzu eine modifizierte Zerlegungsrelation für offene Mengen definieren:

Definition 7.1 (Dichte Äquizerlegbarkeit, vgl. [Dei26], S. 279). Sei $d \geq 1$ und seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Wir schreiben $A \approx B$, falls eine Zahl $n \geq 1$, offene Teilmengen $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ und $B_1, \dots, B_n \subseteq B$ sowie Isometrien $g_1, \dots, g_n \in \text{Isom}(\mathbb{R}^d)$ existieren, sodass gilt:

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.
2. $\bigcup_{i=1}^n A_i$ ist dicht in A und $\bigcup_{i=1}^n B_i$ ist dicht in B .
3. $g_i A_i = B_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

In dieser Variante werden die Mengen A und B also durch endlich viele kongruente offene Mengen so ausgefüllt, dass die resultierenden Vereinigungen keine „offenen Löcher“ mehr aufweisen. Das für die Dimension $d \geq 3$ resultierende Paradoxon ist verblüffend:

Theorem 7.2 (Dougherty / Foreman 1994, vgl. [Dei26], S. 279). Sei $d \geq 3$. Dann sind alle offenen und beschränkten Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ äquizerlegbar im Sinne der obigen Relation ($A \approx B$).

Es ist von Bedeutung, dass das Theorem von Dougherty und Foreman gänzlich ohne das Auswahlaxiom – und somit rein in ZF – bewiesen werden kann. Da die topologische Basis des $\mathbb{R}^d$ aus offenen Kugeln mit rationalen Radien und Mittelpunkten besteht, lässt sich diese Familie über Cantors klassische Diagonalisierung von $\mathbb{Q}$ explizit bijektiv auf die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ abbilden. Diese Wohlordnung der Basis erlaubt eine rein konstruktive Vorschrift zur Auswahl der benötigten Mengen, wodurch selbst das abzählbare Auswahlaxiom (CC) (vgl. [Her06], S. 14) überflüssig wird. Dies zeigt, dass die Paradoxie nicht bloß ein Artefakt der Mengenlehre ist, sondern eine Eigenschaft der Geometrie des $\mathbb{R}^d$ darstellt.

Ein Modell von R. M. Solovay

Im Folgenden vgl. [Sol70]. Diese Arbeit von Robert M. Solovay (1970) markiert einen fundamentalen Wendepunkt in der Mengenlehre. Das im Zentrum dieser Arbeit stehende *Theorem 1* liefert ein relatives Konsistenzresultat, welches die weitreichenden Konsequenzen des Auswahlaxioms aufzeigt und gleichzeitig formal beweist, dass maßtheoretische und topologische Pathologien keine inhärenten Eigenschaften der reellen Zahlen sind.

Unter der Prämisse, dass $\text{ZFC} + I$ widerspruchsfrei ist – wobei I die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl postuliert – konstruiert Solovay ein Modell, in welchem das Axiomensystem $\text{ZF} + \text{DC}$, (wobei DC das Prinzip der abhängigen Auswahlen bezeichnet, vgl. [Her06], S. 15) gültig ist. Die fundamentale Erkenntnis dieser Konstruktion liegt im Nachweis der folgenden Eigenschaften:

1. **Lebesgue-Messbarkeit:** Jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist Lebesgue-messbar. Die Existenz nicht-messbarer Mengen (wie der klassischen Vitali-Mengen) ist demnach ohne das volle Auswahlaxiom nicht aus den Axiomen von ZF ableitbar.
2. **Baire-Eigenschaft:** Jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt die Baire-Eigenschaft; das heißt, es existiert eine offene Menge U , sodass die symmetrische Differenz $(A \setminus U) \cup (U \setminus A)$ mager ist.

3. **Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft:** Jede überabzählbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge (eine abgeschlossene Menge ohne isolierte Punkte, vgl. [Dei21]).
4. **Existenz von Borel-Auswahlfunktionen:** Für jede durch die reellen Zahlen indizierte Familie nicht-leerer Mengen $\{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ mit $A_x \subseteq \mathbb{R}$ existieren Borel-messbare Funktionen $h_1, h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche ein kontrolliertes Auswahlprinzip erlauben. Die Mengen sind gegeben durch

$$\{x \in \mathbb{R} \mid h_1(x) \notin A_x\} \quad \text{bzw.} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid h_2(x) \notin A_x\},$$

wobei erstere eine Lebesgue-Nullmenge bildet, letztere eine Menge erster Kategorie.

Damit ist die Unbeweisbarkeit solcher Pathologien innerhalb von $\text{ZF} + \text{DC}$ endgültig abgesichert. Da das Prinzip der abhängigen Auswahlen das Axiom der abzählbaren Auswahl $\text{DC} \implies \text{CC}$ impliziert (vgl. [Her06], S. 15), ist Solovays Konstruktion folglich auch ein konsistentes Modell für das System $\text{ZF} + \text{CC}$. Dies ist insofern von Bedeutung, als dass die Gültigkeit von CC zwingend benötigt wird, um die σ -Additivität des Lebesgue-Maßes abzusichern. Das Theorem demonstriert somit, dass selbst unter Gewährleistung einer Maßtheorie mittels $\text{ZF} + \text{CC}$ die Existenz maßtheoretischer Pathologien unbeweisbar bleibt.

8 Fazit und Schlussbetrachtung

Die vorliegende Arbeit hat den Weg von der intuitiven Ablehnung volumenverändernder Zerlegungen hin zu den paradoxen Resultaten der modernen Mengenlehre nachgezeichnet. Ein zentraler Wendepunkt dieser Untersuchung war die Konstruktion von nicht Lebesgue-messbaren Mengen (Vitali-Mengen). Das lieferte den fundamentalen Beweis dafür, dass unter der Annahme des Auswahlaxioms das Lebesgue-Maß nicht auf die gesamte Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden kann.

Auf diesem maßtheoretischen Fundament bauten die Überlegungen zum Banach-Tarski-Paradoxon auf. Es wurde gezeigt, dass die Zerlegung einer Kugel in zwei identische Kopien zwar unser physikalisches Verständnis von Materie verletzt, innerhalb der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC) jedoch eine mathematische Realität darstellt. Die Paradoxie erwies sich dabei als direktes Resultat der geschickten Ausnutzung algebraischer Strukturen – insbesondere der freien Gruppe F_2 – in Kombination mit den durch das Auswahlaxiom garantierten Repräsentantensystemen.

Letztlich offenbart die Auseinandersetzung mit Vitali, Banach und Tarski das spannungsreiche Verhältnis zwischen mathematischer Freiheit und physikalischer Intuition. Es zeigt sich, dass ein geometrisches Kontinuum ohne die ordnende Schranke der Messbarkeit weit mehr sein kann als die bloße Summe seiner Teile.

Literatur

- [Ban23] Stefan Banach. Sur le problème de la mesure. *Fundamenta Mathematicae*, 4(1):7–33, 1923.
- [BPV23] Angelo Bella, Daniele Puglisi, and Alfonso Villani. Nonmeasurable Vitali set: Variations on theme. *Quaestiones Mathematicae*, 2023.
- [Coh13] Donald L. Cohn. *Measure Theory*. Birkhäuser, 2. edition, 2013.
- [Dei21] Oliver Deiser. Analysis 2. Online unter: <https://aleph1.info>, mar 2021. München (Vorwort). Online-Ressource der erweiterten Fassung vom 19.05.2026, 653 Seiten, 445 Abbildungen. Zugriff: 19.05.2026.
- [Dei26] Oliver Deiser. Reelle Zahlen - Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen. Online unter: <https://aleph1.info>, 2026. Zugriff: 18.04.2026.
- [Els18] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Spektrum, 8. edition, 2018.
- [Hen18] Lukas Hendorfer. Die Topologie von $\mathbb{R}$ und die Kontinuumshypothese, 2018.
- [Her06] Horst Herrlich. *Axiom of Choice*, volume 1876 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2006.
- [Kan25] Deborah Kant. *Das mengentheoretische Unabhängigkeitsphänomen, Eine Welt jenseits der mathematischen Beweiskraft*. Springer Spektrum, 2025.
- [Kio26] Steffen Kionke. Gruppentheorie, 2026. FernUniversität in Hagen, Kurs 01324.
- [Kir90] Arnold Kirsch. Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es verstehen? Berichte über mathematik und unterricht, ETH Zürich, April 1990.
- [Kir26] Werner Kirsch. Maß- und integrationstheorie, 2026. FernUniversität in Hagen, Kurs 01145.
- [Kre12] Marcel Kreuter. Das Inhaltsproblem, 2012.
- [MKL26] Delio Mugnolo, Joachim Kerner, and Hafida Laasri. Funktionalanalysis, 2026. FernUniversität in Hagen, Kurs 61213, Version 2026.
- [Pet06] Andrea Peter. Das Banach-Tarski Paradoxon, 2006.
- [Sol70] Robert M. Solovay. A model of set-theory in which every set of reals is lebesgue measurable. *The Annals of Mathematics*, 92(1):1–56, 1970.
- [Tao11] Terence Tao. *An introduction to measure theory*. American Mathematical Society, 2011. Department of Mathematics, UCLA.

- [TW16] Grzegorz Tomkowicz and Stan Wagon. *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge University Press, 2. edition, 2016.
- [Ung26] Luise Unger. Lineare Algebra, 2026. FernUniversität in Hagen, Kurs 01143.
- [Win21] Paul Winkler. Das Paradoxon von Banach-Tarski: Seminararbeit aus Analysis. Universität Wien, 2021.