

FERNUNIVERSITÄT IN HAGEN

Fakultät für Mathematik und Informatik

Lehrgebiet Analysis

Bachelorarbeit

Der Fraktionalkalkül

Tobias Wolf

15. September 2026

Erstgutachter

Prof. Dr. Delio Mugnolo

Zweitgutachterin

Dr. Polyxeni Spilioti

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die Bachelorarbeit selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für enthaltene Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Bachelorarbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Bachelorarbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiats-erkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate geprüft werden kann und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Stuttgart, 15. September 2026

Tobias Wolf

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
2	Grundlagen	9
2.1	Integrationstheorie	9
2.2	Die Laplace-Transformation	12
2.3	Die Gammafunktion	14
2.4	Die Mittag-Leffler-Funktion	14
3	Die fraktionale Ableitung	17
3.1	Das fraktionale Integral	17
3.2	Die fraktionale Ableitung	26
4	Fraktionale Differentialgleichungen	33
4.1	Die Differentialgleichung $D^\alpha y = \lambda y$	33
4.1.1	Riemann–Liouville Differentialgleichungen	34
4.1.2	Caputo-Differentialgleichungen	40
4.2	Die Differentialgleichung $D^\alpha y - \lambda y = f$	44
5	Zusammenfassung	49

Kapitel 1

Einführung

Was liegt dazwischen? Eine einfache Frage, welche in verschiedenen Kontexten verschieden Antworten liefert. In der Physik führt die Frage zwangsweise zur Quantenmechanik und der Diskretisierung von Zuständen. In der Mathematik könnte eine Antwort sein, dass zwischen zwei reellen Zahlen immer eine weitere reelle Zahl liegt. Wir wollen die Frage im Kontext der Differential- und Integralrechnung stellen.

Die Frage ist: Gibt es eine halbe Ableitung? Schon Leibniz schien sich dieser Frage bewusst, da er in einem Brief vom 30. September 1695 an l'Hôpital [8] über die Antwort philosophierte. Die Frage wurde später von vielen Personen mit „Ja“ beantwortet. Dies führt zu dem Begriff der fraktionalen Ableitungen, welche die Ordnung von Ableitungen auf positive reelle Zahlen verallgemeinern. Weiter gibt es viele Definitionen mit unterschiedlichen Eigenschaften. Eine Auflistung einiger wichtiger findet sich in [11].

Heute sind fraktionale Ableitungen für Anwendungen interessant um Phänomene quantitativ zu beschreiben. Dies umfasst insbesondere sogenannte Gedächtniseffekte, bei denen der Zustand zum Zeitpunkt t von der Vergangenheit abhängt und nichtlokalität. Arbeiten aus der Physik sind unter anderen [9, 7]. Allerdings gibt es noch keine Fundamentale Theorie in der Physik, in der fraktionale Ableitungen inherent auftauchen. Die Mathematik wurde historisch oft durch Fragen aus den Naturwissenschaften weiterentwickelt, jedoch gibt es bis heute keine zufriedenstellende Interpretation, was eine fraktionale Ableitung ist. Ein weiteres Fragezeichen sind die Anfangsbedingungen, welche für eine fraktionale Differentialgleichung sinnvoll sind, siehe [12]. Aufgrund der Fülle an Themen werden wir uns auf die Theorie der Riemann–Liouville- und Caputo fraktionale Ableitung beschränken.

Wir beginnen diese Arbeit mit der Wiederholung der Grundlagen. Die verwendete Theorie basiert auf der Lebesgue-Integrationstheorie, des weiteren benötigen wir die Laplace-Transformation. Wichtige Funktionen sind die Gammafunktion, als stetige Fakultät und die Mittag-Leffler-Funktion als verallgemeinerte Exponentialfunktion.

Weiter werden wir zuerst ein fraktionales Integral einführen und dessen Eigenschaften untersuchen. Die fraktionalen Ableitungen sind dann durch Ableitungen von diesem Integral definiert, entsprechend lassen sich die Eigenschaften der fraktionalen Ableitungen durch die Eigenschaften von diesem Integral zeigen.

Zuletzt wollen wir fraktionale Differentialgleichungen betrachten. Dazu benutzen wir die Laplace-Transformation der fraktionalen Ableitung um eindeutige Anfangsbedingungen festzulegen. Zusätzlich zeigt sich die Laplace-Transformation als praktisches Hilfsmittel, um die Differentialgleichungen zu lösen.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige Sätze zusammengefasst, welche später benötigt werden. Zuerst wiederholen wir die benötigten Konzepte der Lebesgue-Integrationstheorie, woraus wir die Faltung und Laplace-Transformation hervorheben. Danach betrachten wir noch zwei wichtige Funktionen. Die verallgemeinerte Fakultät, die Gammafunktion und die Mittag-Leffler-Funktion, welche in der fraktionalen Analysis die Rolle der Exponentialfunktion übernimmt.

2.1 Integrationstheorie

In dieser Arbeit benutzen wir das Lebesgue-Integral, wie es zum Beispiel in [4] eingeführt wird. Unser Fokus liegt dabei auf den absolut integrierbaren Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ auf einem kompaktem Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Diese Funktionen fassen wir als Elemente aus dem Vektorraum

$$L^1(a, b) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid f \text{ ist messbar und } \int_a^b |f| dx < \infty \right\} \quad (2.1)$$

auf. Diese Räume werden mit der Norm

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| dx \quad (2.2)$$

versehen. Für die Gleichheit von Funktionen $f, g \in L^1(a, b)$ gilt

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \|f - g\|_1 = 0. \quad (2.3)$$

Zusätzlich werden wir den Satz von Fubini und Tonelli benötigen, welcher es erlaubt die Integrationsreihenfolge von geschachtelten Integralen zu ändern. Wir brauchen dies für zwei kompakte Intervalle $I_1 = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $I_2 = [c, d]$, $c, d \in \mathbb{R}$. Dazu orientieren wir uns an der Formulierung von [4, Satz V.2.1].

Satz 2.1. Für zwei kompakte Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ und einer messbaren Funktion f auf $I_1 \times I_2$ gilt

$$\int_{I_1 \times I_2} |f| dx dy = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} |f(x, y)| dy \right) dx = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} |f(x, y)| dx \right) dy. \quad (2.4)$$

Falls

$$\int_{I_1 \times I_2} |f| dx dy < \infty, \quad (2.5)$$

so folgt

$$\int_{I_1 \times I_2} f dx dy = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x, y) dx \right) dy. \quad (2.6)$$

Weiter brauchen wir Sätze, die erlauben Integral und Grenzwert zu vertauschen. Der erste ist der Satz von der monotonen Konvergenz [4, Satz IV.2.7]

Satz 2.2. Für jede wachsende Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ auf einem kompaktem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $f_n(x) \geq 0$ und $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, für alle $x \in I$ gilt

$$\int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n dx. \quad (2.7)$$

Außerdem werden wir den Satz von der majorisierten Konvergenz benutzen. Dieser lautet [4, Satz IV.5.2]

Satz 2.3. Für messbare Funktionen f, f_n ($n \in \mathbb{N}$) auf einem kompaktem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ für fast alle $x \in I$. Zusätzlich gebe es eine integrierbare Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in I$, $|f_n(x)| \leq |g|$ gilt. Dann sind f und alle f_n integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n dx = \int_I f dx, \quad (2.8)$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_n - f| dx = 0. \quad (2.9)$$

Ein großer Fokus liegt auf der Differenzierbarkeit einer Funktion f . Besonders interessant sind Funktionen, für die eine Art Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung gilt. Dazu brauchen wir den Begriff der absoluten Stetigkeit [10, Abschnitt A.1.3]

Definition 2.4. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, mit einem kompaktem Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt absolut stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede endliche Familie von paarweise disjunkten, offenen Subintervallen (a_k, b_k) , $k = 1, 2, \dots, n$,

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \quad (2.10)$$

Wir definieren

$$AC([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ ist absolut stetig}\} \quad (2.11)$$

und

$$AC^n([a, b]) := \{f : f \in C^{n-1}([a, b]), f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}, \quad (2.12)$$

mit

$$C^n([a, b]) := \{f : f \text{ ist auf } [a, b] \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar}\}. \quad (2.13)$$

Für diese Funktionen gilt der Satz [4, Satz VII.4.14]

Satz 2.5. Für $f \in L^1(a, b)$, mit $-\infty < a < b < \infty$ ist

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.14)$$

absolut stetig, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für fast alle $x \in [a, b]$.

Falls umgekehrt $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig ist und setzt man $F' := 0$ für alle $x \in [a, b]$, in denen F nicht differenzierbar ist, so ist $F' \in L^1(a, b)$ und es gilt

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt \quad (a \leq x \leq b). \quad (2.15)$$

Nun wollen wir die Faltung von zwei Funktionen wiederholen. Für zwei Funktionen können wir die Faltung definieren durch

$$[f * g](x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt. \quad (2.16)$$

Nach [10, Example 7.1.3] gilt für $f, g \in L^1(-\infty, \infty)$ die Ungleichung

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1, \quad (2.17)$$

Damit ist $[f * g] \in L^1(-\infty, \infty)$. Nun betrachten wir Funktionen auf einem Intervall $I = [a, b]$. Diese können wir für $x \notin I$ durch null fortsetzen. Dann folgt für $g \in L^1(a, b)$

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\chi_{[a,b]}(t)g(t) dt = \int_a^b f(x-t)g(t) dt. \quad (2.18)$$

2.2 Die Laplace-Transformation

Dieser Abschnitt basiert auf den Ergebnissen von [1, Chapter 1], wo die Theorie für lokal integrierbare Funktionen entwickelt wird. Die Laplace-Transformation ist definiert als

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.19)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$, für die das Integral absolut konvergiert. Dies ist der Fall, falls Konstanten $M, N, \alpha > 0$ existieren, sodass

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x} \quad \text{für fast alle } x \geq N. \quad (2.20)$$

Dann ist $\mathcal{L}[f](s)$ für $s > \alpha$ absolut konvergent. Wir nennen Funktionen, die diese Eigenschaft haben Laplace-transformierbar. In dieser Arbeit sind wir an kompakten Intervallen $I = [0, T]$ interessiert. Daher kann es sinnvoll sein Funktionen $f \in L^1(0, T)$, welche nicht Laplace-transformierbar sind durch

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [0, T] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.21)$$

auf $L^1(0, \infty)$ fortzusetzen. Dann ist $\mathcal{L}[\tilde{f}](s)$ für alle $s \geq 0$ absolut konvergent und somit ist f identifiziert mit $\tilde{f}$ Laplace-transformierbar.

Wir fassen die wichtigen Eigenschaften der Laplace-Transformation zusammen als

Satz 2.6. Seien $f, g \in L^1(0, T)$ Laplace-transformierbar für $s > \alpha > 0$, wobei α Gl. (2.20) erfüllt. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

(a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $s > \alpha$ gilt $\mathcal{L}[af + bg](s) = a\mathcal{L}[f](s) + b\mathcal{L}[g](s)$.

(b) Falls $\mathcal{L}[f](s) = 0$ für alle $s \geq 0$, dann folgt $f(x) = 0$ fast überall.

(c) Es gilt für $s > \alpha$, dass $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)$.

(d) Falls $f \in AC^n([0, T])$, und $f^{(n)}$ Laplace-transformierbar für $s > \alpha$, dann gilt $\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)$.

Beweis. (a) Wir betrachten Laplace-transformierbare $f, g \in L^1(0, T)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Es existieren damit $M, N, \alpha > 0$, sodass $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq Me^{\alpha x} + Me^{\alpha x}$, für fast alle $x \geq N$. Damit ist

$f + g$ Laplace-transformierbar und es folgt

$$\mathcal{L}[af + bg](s) = \int_0^{\infty} (af(t) + bg(t))e^{-st} dt \quad (2.22a)$$

$$= a \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt + b \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \quad (2.22b)$$

$$= a\mathcal{L}[f](s) + b\mathcal{L}[g](s). \quad (2.22c)$$

(b) Für den Beweis siehe [1, Theorem 1.7.3].

(c) Für den Beweis siehe [1, Proposition 1.6.4].

(d) Nach [1, Corollary 1.6.6] gilt für $f \in AC([0, T])$ und Laplace-transformierbare Ableitung f' mit $s > \alpha$, dass $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Damit folgt für $f \in AC^n([0, T])$ durch wiederholtes Anwenden, dass

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s\mathcal{L}[f^{(n-1)}](s) - f^{(n-1)}(0) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0). \quad (2.23)$$

□

Eine wichtige Transformation ist, $f(x) = x_+^\alpha$ für $\alpha > -1$ und $x_+ := \max\{0, x\}$. Wir rechnen mit Inspiration von [6, Example 7.4]

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-sx} dx \quad (2.24a)$$

$$\stackrel{t=sx}{=} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \frac{e^{-t}}{s} dt \quad (2.24b)$$

$$= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad (2.24c)$$

wobei die rechte Seite für $s > 0$ konvergent ist. Zusätzlich haben wir schon die Gammafunktion $\Gamma(x)$ benutzt, welche als nächstes eingeführt wird.

2.3 Die Gammafunktion

Die Gammafunktion ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots\}$ wie folgt definiert [13, Section 1.1]

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (2.25)$$

Die für uns interessante Eigenschaft ist

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (2.26)$$

und damit für $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (2.27)$$

Damit ist die Gammafunktion für $x > 0$ eine stetige Fortsetzung der Fakultät. Desweiteren können wir die Gammafunktion asymptotisch abschätzen durch die Stirling-Approximation [3, Kapitel 7]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x} = 1. \quad (2.28)$$

Außerdem werden wir die Beta-Funktion benötigen. Diese ist definiert für $x, y > 0$ durch [13, Section 1.1.4]

$$B(x, y) := \int_0^1 \tau^{x-1} (1-\tau)^{y-1} d\tau. \quad (2.29)$$

Dabei gilt für $x, y > 0$ der Zusammenhang mit der Gammafunktion

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (2.30)$$

2.4 Die Mittag-Leffler-Funktion

Später werden wir sehen, dass es praktisch ist eine verallgemeinerte Exponential-Funktion einzuführen. Diese ist die Mittag-Leffler-Funktion und ist für $\alpha, \beta > 0$, sowie $x \in \mathbb{R}$ wie folgt definiert [13, Section 1.2.1]

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}. \quad (2.31)$$

Diese hat viele Eigenschaften. Für unsere Zwecke reicht es aus die Laplace-Transformation zu berechnen. Dazu orientieren wir uns an [13, Section 1.2.2] und beweisen

Satz 2.7. *Die Laplace-Transformation der Funktion*

$$f(x) = x_+^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm \lambda x_+^\alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.32)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ und $x_+ = \max\{0, x\}$ ist

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp \lambda} \quad \text{für } s^\alpha > |\lambda| \quad (2.33)$$

Beweis. Wir betrachten $\lambda > 0$, damit sind $a_i = \frac{\lambda^i x_+^{\alpha i + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha i + \beta)} \geq 0$ und $\sum_i a_i$ ist eine monoton steigende Folge. Wir setzen nun ein

$$\mathcal{L}[x_+^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda x_+^\alpha)](s) = \mathcal{L}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i x_+^{\alpha i + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha i + \beta)}\right](s) \quad (2.34a)$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i x^{\alpha i + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha i + \beta)} dx \quad (2.34b)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sum_{i=0}^n e^{-sx} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha i + \beta)} dx \quad (2.34c)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mathcal{L}\left[\frac{\lambda^i x^{\alpha i + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha i + \beta)}\right](s) \quad (2.34d)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i}{s^{\alpha i + \beta}} = \frac{1}{s^\beta} \frac{1}{1 - \lambda/s^\alpha} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad \text{für } s^\alpha > \lambda. \quad (2.34e)$$

Wir haben den Satz der monotonen Konvergenz [Satz 2.2](#) benutzt, um den Grenzwert und Laplace-Transformation zu vertauschen. Weiter gilt nun für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$, dass

$$\left| \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i x^{\alpha i + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha i + \beta)} \right| \leq \sum_{i=0}^n \frac{|\lambda|^i x^{\alpha i + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha i + \beta)} \leq \sum_{i=0}^\infty \frac{|\lambda|^i x^{\alpha i + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha i + \beta)}. \quad (2.35)$$

Damit können wir für $\lambda \in \mathbb{R}$ die obige Rechnung wiederholen und Limes und Integral durch [Satz 2.3](#) vertauschen. Womit [Gl. \(2.33\)](#) folgt. $\square$

Kapitel 3

Die fraktionale Ableitung

In diesem Kapitel wollen wir die fraktionale Ableitung definieren und einige Eigenschaften betrachten. Dies machen wir indem wir über die Cauchy-Formel ein fraktionales Integral definieren und dieses ableiten. Entsprechend schauen wir uns zuerst einige Eigenschaften dieses Integrals an. Da das Ableiten des Integrals vor oder nach der Integration passieren kann werden wir auf zwei verschiedene fraktionale Ableitungen mit unterschiedlichen Eigenschaften stoßen. Diese werden wir untersuchen. Zuletzt wird die Laplace-Transformation dieser Ableitungen betrachtet, da diese sich für das Lösen fraktionaler Differentialgleichungen als praktisch erweisen wird. Die Sätze mit beweisen orientieren sich an [13, Chapter 2], sowie [2, Chapter 2]. Die fraktionalen Integrale und Ableitungen können auch für komplexe Ordnungen definiert werden. Wir wollen uns aber auf reelle Ordnungen beschränken. Zusätzlich werden wir immer kompakte Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ betrachten, sodass $I = [a, b]$ und $-\infty < a < b < \infty$. Als zugrunde liegenden Körper für Vektorräume werden wir auch die reellen Zahlen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ benutzen.

3.1 Das fraktionale Integral

Um eine fraktionale Ableitung zu definieren werden wir zuerst ein fraktionales Integral definieren und durch entsprechendes Ableiten erhalten wir eine fraktionale Ableitung. Zuerst betrachten wir die folgende Kettenregel für Integrale.

Satz 3.1. *Sei $f \in L^1(a, b)$, dann gilt für $x \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung*

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (3.1)$$

Beweis. Wir beweisen den Satz über vollständige Induktion. Für $n = 1$ gilt

$$\int_a^x f(t) dt = \frac{1}{0!} \int_a^x (x-t)^0 f(t) dt. \quad (3.2)$$

Die Gleichung folgt mit $0! = 1$, sowie $(x - t)^0 = 1$. Der Anfang ist gemacht. Die Aussage sei nun für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Für $n + 1$ setzen wir ein und benutzen die Induktionsannahme, um die ersten n Integrale zu einem Integral zusammenzufassen. Es folgt

$$\underbrace{\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} dx_n}_{n \text{ Integrale}} \int_a^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \underbrace{\int_a^t f(x_{n+1}) dx_{n+1}}_{:=u(t)} dt \quad (3.3a)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt \quad (3.3b)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{-1}{n} (x-t)^n u(t) \Big|_a^x + \frac{1}{n} \int_a^x (x-t)^n f(t) dt \right] \quad (3.3c)$$

$$= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f(t) dt. \quad (3.3d)$$

Dabei haben wir benutzt, dass nach [Satz 2.5](#) $u(a) = 0$ ist. □

Nun können wir in [Gl. \(3.1\)](#) das n durch eine reelle Zahl $\alpha > 0$ ersetzen. Dies führt zu der folgenden

Definition 3.2. Sei $f \in L^1(a, b)$, sowie $\alpha > 0$. Dann definieren wir für die $x \in [a, b]$, für die das Integral

$${}_a I_x^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (3.4)$$

absolut konvergiert, das fraktionale Integral der Ordnung α von f .

Wir wollen die Notation erklären.

Notation 3.3. Es gibt mehrere Schreibweisen für fraktionale Operatoren, wie die Ableitung oder hier das Integral. In [\[13\]](#) wird ${}_a I_x^\alpha f(x)$ benutzt, eine andere Notation ist $I_{a+}^\alpha f(x)$, [\[5\]](#). Wir wollen die Notation wie folgt benutzen: ${}_a I_x^\alpha$ soll den Operator bezeichnen, wobei das x andeuten soll, dass die Variable die obere Grenze des Integrals ist. Wenn wir zum Beispiel $x = 0$ einsetzen schreiben wir ${}_a I_x^\alpha f(0)$.

Bemerkung 3.4. Nach [\[5, Equation 1.6\]](#) können wir dieses Integral auch als Faltung schreiben. Es gilt für $\alpha > 0$ und für fast alle $x \in [a, b]$

$${}_a I_x^\alpha f(x) = [\iota_\alpha * f](x), \quad (3.5)$$

wobei wir

$$\iota_\alpha(x) = \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.6)$$

mit $x_+ = \max\{0, x\}$ wählen. Dies wird es weiter unten erlauben die Laplace-Transformation einer fraktionalen Ableitung zu berechnen.

Nun wollen einige Eigenschaften dieses Integrals untersuchen.

Satz 3.5. *Sei $f \in L^1(a, b)$, sowie $\alpha, \beta > 0$. Dann gelten die folgende Aussagen:*

(a) *Es ist ${}_a I_x^\alpha f \in L^1(a, b)$.*

(b) *${}_a I_x^\alpha : L^1(a, b) \rightarrow L^1(a, b)$ ist ein beschränkter linearer Operator.*

(c) *Es gilt*

$${}_a I_x^\beta [{}_a I_x^\alpha f](x) = {}_a I_x^\alpha [{}_a I_x^\beta f](x) = {}_a I_x^{\alpha+\beta} f(x) \quad (3.7)$$

für fast alle $x \in [a, b]$ und falls $\alpha + \beta \geq 1$ für alle $x \in [a, b]$

Beweis. (a) Wir zeigen, dass

$$\|{}_a I_x^\alpha f\|_1 \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_1. \quad (3.8)$$

Dazu betrachten wir zuerst

$$\int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} (b-t)^\alpha \leq \frac{1}{\alpha} (b-a)^\alpha < \infty, \quad (3.9)$$

für $a \leq t \leq x \leq b$. Nun setzen wir ein und rechnen

$$\int_a^b |({}_a I_x^\alpha f)(x)| dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right| dx \quad (3.10a)$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^b \chi_{[a,x]}(t) (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx. \quad (3.10b)$$

Nun benutzen wir Fubini und mit $a \leq t \leq x \leq b$ folgt

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^b \chi_{[a,x]}(t) (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt \quad (3.11a)$$

$$\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} (b-a)^\alpha \int_a^b |f(t)| dt < \infty, \quad (3.11b)$$

wobei wir $f \in L^1(a, b)$ und [Gl. \(3.9\)](#) benutzt haben. Es folgt ${}_a I_x^\alpha f \in L^1(a, b)$.

(b). Wir rechnen die Linearität nach. Für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $f, g \in L^1(a, b)$ folgt

$${}_a I_x^\alpha [c_1 f + c_2 g](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (c_1 f(t) + c_2 g(t)) dt \quad (3.12a)$$

$$= \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt \quad (3.12b)$$

$$= c_1 ({}_a I_x^\alpha f)(x) + c_2 ({}_a I_x^\alpha g)(x). \quad (3.12c)$$

Wir haben dabei die Linearität des Integrals benutzt. Nach (a) ist $c_1 ({}_a I_x^\alpha f) + c_2 ({}_a I_x^\alpha g) \in L^1(a, b)$, womit die Linearität gezeigt ist. Die Beschränktheit folgt aus (a) mit

$$\|{}_a I_x^\alpha f\|_1 \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_1. \quad (3.13)$$

(c). Sei $f \in L^1(a, b)$. Nach (a) ist ${}_a I_x^\alpha f \in L^1(a, b)$. Somit ist auch ${}_a I_x^\beta [{}_a I_x^\alpha f] \in L^1(a, b)$. Wir setzen an

$${}_a I_x^\beta [{}_a I_x^\alpha f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau dt \quad (3.14a)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^x \chi_{[a,t]}(\tau) (x-t)^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau dt. \quad (3.14b)$$

Wir setzen $|f|$ ein und rechnen mit Fubini und $a \leq \tau \leq t \leq x$

$$\int_a^x \int_a^x \chi_{a,t}(\tau) (x-t)^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau)| d\tau dt = \int_a^x |f(\tau)| \int_\tau^x (x-t)^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} dt d\tau \quad (3.15a)$$

$$= \int_a^x |f(\tau)| (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\beta-1} u^{\alpha-1} du d\tau \quad (3.15b)$$

$$= \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) {}_a I_x^{\alpha+\beta} [|f|](x), \quad (3.15c)$$

für fast alle $x \in [a, b]$. Dabei haben wir die Substitution $t = \tau + u(x - \tau)$, sowie

$$\int_0^1 (1-u)^{\beta-1} u^{\alpha-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \text{für } \alpha, \beta > 0 \quad (3.16)$$

benutzt. Insbesondere gilt damit ${}_aI_x^\beta[{}_aI_x^\alpha|f|](x) = {}_aI_x^{\alpha+\beta}[|f|](x)$ für fast alle $x \in [a, b]$. Falls nun ${}_aI_x^{\alpha+\beta}[|f|](x_0) < \infty$, für ein gegebenes $x_0 \in [a, b]$, können wir die Integrationsreihenfolge wählen und erhalten mit obiger Rechnung

$${}_aI_x^\beta[{}_aI_x^\alpha f](x_0) = {}_aI_x^{\alpha+\beta}f(x_0). \quad (3.17)$$

Nun ist ${}_aI_x^\alpha[|f|] \in L^1(a, b)$ und damit ${}_aI_x^\beta[{}_aI_x^\alpha|f|] \in L^1(a, b)$, woraus

$${}_aI_x^\beta[|{}_aI_x^\alpha|f|](x) = {}_aI_x^\beta[{}_aI_x^\alpha|f|](x) < \infty \quad \text{für fast alle } x \in [a, b] \quad (3.18)$$

folgt. Damit gilt Gl. (3.17) für fast alle $x \in [a, b]$. Sei nun $\alpha + \beta \geq 1$ und damit $(x - t)^{\alpha+\beta-1}$ für $t \in [a, x]$ durch $(b - a)^{\alpha+\beta-1}$ beschränkt. Wir rechnen

$${}_aI_x^{\alpha+\beta}[|f|](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x (x - t)^{\alpha+\beta-1} |f(t)| dt \quad (3.19a)$$

$$\leq \frac{(b - a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|f\|_1 < \infty \quad \text{für alle } x \in [a, b]. \quad (3.19b)$$

Es folgt Gl. (3.17) für alle $x \in [a, b]$. Wir haben keine zusätzlichen Annahmen zu α und β getroffen. Damit können wir α und β vertauschen und das oben bewiesene anwenden. Es folgt ${}_aI_x^\alpha[{}_aI_x^\beta f](x) = {}_aI_x^{\alpha+\beta}f(x)$ für fast alle $x \in [a, b]$ und alle $x \in [a, b]$, falls $\alpha + \beta \geq 1$. $\square$

Bis jetzt haben wir $\alpha > 0$ betrachtet. Es macht Sinn ${}_aI_x^0 f := f$ zu definieren. Dies ist auch eine sinnvolle Definition, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.6. Für festes $f \in L^1(a, b)$ ist die Funktion $g_f : [0, \infty) \rightarrow L^1(a, b)$, $\alpha \mapsto {}_aI_x^\alpha f$ stetig.

Beweis. Sei $f \in L^1(a, b)$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen zuerst, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$0 < \alpha < \delta \Rightarrow \|{}_aI_x^\alpha f - f\|_1 < \varepsilon. \quad (3.20)$$

Dazu benutzen wir die Beweisidee aus [14, Theorem 2.6]. Dazu betrachten wir

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt - f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} \frac{f(x - t) - f(x)}{t^{1-\alpha}} dt + f(x) \left[\frac{(x - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - 1 \right] \quad (3.21a)$$

$$= (Uf)(\alpha) + (Vf)(\alpha), \quad (3.21b)$$

damit ist $\|_a I_x^\alpha f - f\|_1 \leq \|(Uf)(\alpha)\|_1 + \|(Vf)(\alpha)\|_1$. Zuerst können wir $\|(Vf)(\alpha)\|_1$ abschätzen durch

$$\|(Vf)(\alpha)\|_1 \leq \int_a^b |f(x)| \left| \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| dx \quad (3.22)$$

$$\leq \int_a^b |f(x)| \left(\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1 \right) dx \quad (3.23)$$

$$\leq \left(\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1 \right) \|f\|_1 < \infty. \quad (3.24)$$

Wir haben damit eine integrable Majorante gefunden und wir können Limes und Integral durch den Satz von der majorisierten Konvergenz [Satz 2.3](#) vertauschen. Damit ist $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|(Vf)(\alpha)\|_1 = 0$ und insbesondere existiert $\delta_1 > 0$, sodass $\|(Vf)(\alpha)\|_1 < \varepsilon/3$, für $\alpha < \delta_1$. Um $\|(Uf)(\alpha)\|_1$ abzuschätzen nutzen wir aus, dass der Raum $C_0^\infty([a, b])$ dicht im $L^1(a, b)$ ist. Wir wählen eine Funktionenfolge $\phi_n \in C_0^\infty([a, b])$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \phi_n\|_1 = 0$. Es folgt

$$\|(Uf)(\alpha)\|_1 \leq \|(U(f - \phi_n))(\alpha)\|_1 + \|(U\phi_n)(\alpha)\|_1. \quad (3.25)$$

Zuerst benutzen wir für ein festes $n \in \mathbb{N}$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung um die Ungleichung

$$\left| \frac{\phi_n(x-t) - \phi_n(x)}{t} \right| \leq \max_{t \in [a, b]} |\phi_n'(t)| \quad (3.26)$$

zu erhalten. Weiter ist

$$\|(U\phi_n)(\alpha)\|_1 \leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b \int_0^{x-a} t^\alpha \max |\phi_n'| dt dx \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0 \quad (3.27)$$

und damit existiert $\delta_2 > 0$ mit $\|(U\phi_n)(\alpha)\|_1 < \varepsilon/3$, für $\alpha < \delta_2$. Zuletzt schätzen wir $\|(U(f - \phi_n))(\alpha)\|_1$

ab. Wir setzen ein und benutzen den Satz von Fubini um die Integrationsreihenfolge zu vertauschen

$$\|(U(f - \phi_n))(\alpha)\|_1 \leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_a^b \int_0^{x-a} \frac{|f(x-t) - \phi_n(x-t)|}{t^{1-\alpha}} + \frac{|f(x) - \phi_n(x)|}{t^{1-\alpha}} dt dx \quad (3.28a)$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^{b-a} \int_{t+a}^b \frac{|f(x-t) - \phi_n(x-t)|}{t^{1-\alpha}} + \frac{|f(x) - \phi_n(x)|}{t^{1-\alpha}} dx dt \quad (3.28b)$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^{b-a} t^{\alpha-1} \left(\int_a^{b-t} |f(u) - \phi_n(u)| du + \int_{t+a}^b |f(x) - \phi_n(x)| dx \right) dt \quad (3.28c)$$

$$\leq \frac{2(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f - \phi_n\|_1. \quad (3.28d)$$

Nun können wir ein N_0 finden, sodass $\|f - \phi_n\|_1 < \varepsilon$, für alle $n \geq N_0$. Zusammengesetzt wählen wir ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\|f - \phi_n\|_1 < \min_{\alpha < \delta} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{6(b-a)^\alpha} \right\} \varepsilon$. Dies können wir machen, da wir α in einer kleinen Umgebung um die Null betrachten und $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{6(b-a)^\alpha} \geq \frac{\min_{\alpha > 0} \Gamma(\alpha+1)}{6(b-a)^\delta}$ ein Minimum hat. Weiter wählen wir $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Damit folgt

$$\|{}_a I_x^\alpha f - f\|_1 \leq \|(U(f - \phi_n))(\alpha)\|_1 + \|(U\phi_n)(\alpha)\|_1 + \|(Vf)(\alpha)\|_1 < \varepsilon, \quad \text{für } \alpha < \delta. \quad (3.29)$$

Als nächstes sei $\alpha_0, \alpha > 0$, sowie $\alpha > \alpha_0$. Wir zeigen $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \|{}_a I_x^\alpha f - {}_a I_x^{\alpha_0} f\|_1 = 0$. Dazu benutzen wir [Satz 3.5 \(c\)](#) und die schon bewiesene Stetigkeit in der 0. Es folgt

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \|{}_a I_x^\alpha f - {}_a I_x^{\alpha_0} f\|_1 = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \|{}_a I_x^{\alpha_0} ({}_a I_x^{\alpha-\alpha_0} f - f)\|_1 \leq \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0 + 1)} \|{}_a I_x^{\alpha-\alpha_0} f - f\|_1 \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_0} 0. \quad (3.30)$$

Falls nun $\alpha < \alpha_0$ ist, folgt

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \|{}_a I_x^\alpha f - {}_a I_x^{\alpha_0} f\|_1 = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \|{}_a I_x^\alpha ({}_a I_x^{\alpha_0-\alpha} f - f)\|_1 \leq \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|{}_a I_x^{\alpha_0-\alpha} f - f\|_1 \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_0} 0. \quad (3.31)$$

□

Als nächstes wollen wir zwei Sätze betrachten, welche Aussagen über Differenzierbarkeit des fraktionalen Integrals machen. Zuerst beweisen wir

Satz 3.7. Für $f \in L^1(a, b)$ und $\alpha > n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d^n}{dx^n} {}_a I_x^\alpha f(x) = {}_a I_x^{\alpha-n} f(x) \quad \text{für fast alle } x \in [a, b]. \quad (3.32)$$

Insbesondere ist ${}_a I_x^\alpha f \in AC^n([a, b])$.

Beweis. Sei $\alpha > n$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $f \in L^1(a, b)$ gegeben. Wir betrachten zuerst ${}_aI_x^{\alpha-n}f$. Nach [Satz 3.5 \(a\)](#) ist ${}_aI_x^{\alpha-n}f \in L^1(a, b)$. Nun können wir mit [Satz 3.5 \(c\)](#) den Operator ${}_aI_x^1$ wiederholt anwenden und die zwei Integrale zu einem zusammenzufassen. Nach [Satz 2.5](#) ist

$$\frac{d}{dx} {}_aI_x^1 f(x) = f(x) \quad (3.33)$$

für fast alle $x \in [a, b]$. Zusammengefasst erhalten wir für $n \geq k \in \mathbb{N}$

$${}_aI_x^k {}_aI_x^{\alpha-n} f(x) = {}_aI_x^{\alpha+k-n} f(x), \quad \text{für alle } x \in [a, b], \quad (3.34)$$

wobei ${}_aI_x^{\alpha+k-n} f \in AC^k([a, b])$ ist. Für ${}_aI_x^\alpha f$ folgt entsprechend mit $k = n$

$$\frac{d^n}{dx^n} {}_aI_x^\alpha f(x) = {}_aI_x^{\alpha-n} f(x) \quad (3.35)$$

und ${}_aI_x^\alpha f \in AC^n([a, b])$. □

Nun wollen wir einen Satz beweisen, welcher Aussage über Differenzierbarkeit von ${}_aI_x^\alpha$ macht, wenn $n > \alpha$ ist. Dies macht

Satz 3.8. Für $f \in C^{n-1}([a, b])$ und $n > \alpha \geq n-1$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$${}_aI_x^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b]). \quad (3.36)$$

Beweis. Sei zunächst $f \in C([a, b])$ und $1 > \alpha > 0$. Wir wollen zeigen, dass ${}_aI_x^{1-\alpha} f \in AC([a, b])$. Dies machen wir in zwei Schritten:

1. ${}_aI_x^{-\alpha} f \in L^1(a, b)$.
2. ${}_aI_x^1 [{}_aI_x^{-\alpha} f](x) = {}_aI_x^{1-\alpha} f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Nach [Satz 2.5](#) folgt dann ${}_aI_x^{1-\alpha} f \in AC([a, b])$. Wir rechnen den ersten Schritt nach, wir haben

$$\|{}_aI_x^{-\alpha} f\|_1 = \int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-(1+\alpha)} f(t) dt \right| dx \quad (3.37a)$$

$$\leq \max_{t \in [a, b]} \{|f(t)|\} \int_a^b \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} dx < \infty, \quad (3.37b)$$

wobei wir $(x-a)^{-\alpha} \in L^1(a, b)$ für $\alpha < 1$ benutzen. Damit ist Schritt 1 gezeigt. Insbesondere folgt damit für alle $x \in [a, b]$, dass

$${}_aI_x^1 [{}_aI_x^{-\alpha} |f|](x) \leq \|{}_aI_x^{-\alpha} [|f|]\|_1 \leq \max_{t \in [a, b]} \{|f(t)|\} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} < \infty. \quad (3.38)$$

Dies erlaubt es im folgendem Fubini zu benutzen. Wir machen weiter

$${}_a I_x^1 [{}_a I_x^{-\alpha} f](x) = \int_a^x \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-(1+\alpha)} f(\tau) d\tau dt \quad (3.39a)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x f(\tau) \int_\tau^x (t-\tau)^{-(1+\alpha)} dt d\tau \quad (3.39b)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau = {}_a I_x^{1-\alpha} f(x), \quad (3.39c)$$

für alle $x \in [a, b]$. Damit ist ${}_a I_x^{1-\alpha} f \in AC([a, b])$. Sei nun $f \in C^{n-1}([a, b])$ und $n > \alpha > n-1$. Wir rechnen mit partieller Integration

$${}_a I_x^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt \quad (3.40a)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \left((x-a)^{n-\alpha} f(a) + \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} f'(t) dt \right). \quad (3.40b)$$

Diesen Schritt machen wir insgesamt $n-1$ -mal und erhalten

$${}_a I_x^{n-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(x-a)^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n+1-\alpha+k)} f^{(k)}(a) + \frac{1}{\Gamma(2n-1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{2n-2-\alpha} f^{(n-1)}(t) dt \quad (3.41a)$$

$$= p_n + {}_a I_x^{2n-1-\alpha} f^{(n-1)}(x). \quad (3.41b)$$

Zuerst betrachten wir p_n . Wir haben durch mehrfache Anwendung von [Satz 2.5](#)

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(n+1-\alpha+k)} (x-a)^{n-\alpha+k} \quad (3.42a)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} {}_a I_x^n (x-a)^{k-\alpha} \quad (3.42b)$$

$$= {}_a I_x^n \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}}_{\in L^1(a,b)} \quad k-\alpha > -1 \text{ für } k \geq 0. \quad (3.42c)$$

Damit ist $p_n \in AC^n([a, b])$. Nun ist nach [Satz 3.7](#) $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} {}_a I_x^{2n-1-\alpha} f^{(n-1)}(x) = {}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n-1)}(x)$. Nach Voraussetzung ist $f^{(n-1)} \in C([a, b])$ und damit ist nach dem schon bewiesenen $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} {}_a I_x^{n-\alpha} f \in AC([a, b])$ und damit ${}_a I_x^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b])$, womit der Beweis fertig ist. $\square$

Der obige Satz bedeutet, dass das fraktionale Integral einer beliebigen stetigen Funktion differenzierbar ist. Dies hat Konsequenzen für fraktionale Ableitungen, mit denen wir jetzt weitermachen.

3.2 Die fraktionale Ableitung

Wir haben gesehen, dass wir fraktionale Integrale definieren können. Nun wollen wir die Intuition benutzen, dass eine Ableitung ein Integral negiert und die Ordnung um eins verringert. Dies führt zu den beiden folgenden Definitionen.

Definition 3.9. Für passende Funktionen f und $n - 1 \leq \alpha < n$, sowie $n \in \mathbb{N}$ definieren wir [\[2\]](#)

$${}_a D_x^\alpha f(x) := \frac{d^n}{dx^n} [{}_a I_x^{n-\alpha} f](x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt \quad (3.43)$$

die Riemann–Liouville fraktionale Ableitung und mit

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) := {}_a I_x^{n-\alpha} \left[\frac{d^n f}{dx^n} \right](x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(t) dt \quad (3.44)$$

die Caputo fraktionale Ableitung.

Bemerkung 3.10. Unser Ableitungsbegriff geht über die absolut stetigen Funktionen. Daher ist es sinnvoll, für die Riemann–Liouville fraktionale Ableitung Funktionen zu betrachten, sodass ${}_a I_x^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b])$. Nach [Satz 3.8](#) ist dies für $f \in C^{n-1}([a, b])$ erfüllt. Tatsächlich sind alle f , die durch $f = {}_a I_x^\alpha \phi$, mit $\phi \in L^1(a, b)$ dargestellt werden können Riemann–Liouville differenzierbar. Nähere Betrachtungen finden sich in [\[14\]](#) und [\[5\]](#). Für die Caputo fraktionale Ableitung haben wir nur die Auswahl $f \in AC^n([a, b])$.

Einige Eigenschaften der Ableitungen werden nun zusammengefasst als

Satz 3.11. *Es gelten die folgenden Behauptungen*

- (a) Die Operatoren ${}_a D_x^\alpha$ und ${}_a^C D_x^\alpha$ sind linear.
- (b) Es gilt für $k > -1$ und $n > \alpha \geq n - 1$, $n \in \mathbb{N}$

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}. \quad (3.45)$$

Falls nun auch $k > n - 1$, dann gilt

$${}_a^C D_x^\alpha (x - a)^k = \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k - \alpha}. \quad (3.46)$$

(c) Für $f \in L^1(a, b)$ und $0 < \alpha < \beta$ gilt

$${}_a D_x^\alpha {}_a I_x^\beta f(x) = {}_a I_x^{\beta - \alpha} f(x). \quad (3.47)$$

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ und $f \in AC^n([a, b])$ ist ${}_a D_x^n f(x) = f^{(n)}(x)$, für fast alle $x \in [a, b]$.

Beweis. (a). Die Ableitung ist linear. Nach [Satz 3.5 \(b\)](#) ist das fraktionale Integral linear. Weiter ist die Verkettung von linearen Operatoren linear und damit sind die fraktionalen Ableitungen linear.

(b). Wir setzen [Definition 3.9](#) mit $n - 1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ ein. Für $k > -1$ gilt

$${}_a D_x^\alpha (x - a)^k = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (t - a)^k (x - t)^{n - 1 - \alpha} dt \quad (3.48a)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n (x - a)^{k + n - \alpha}}{dx^n} \int_0^1 u^k (1 - u)^{n - 1 - \alpha} du \quad (3.48b)$$

$$= \frac{\Gamma(k + n + 1 - \alpha)}{\Gamma(k + 1 - \alpha) \Gamma(n - \alpha)} (x - a)^{k - \alpha} \cdot \frac{\Gamma(k + 1) \Gamma(n - \alpha)}{\Gamma(k + 1 + n - \alpha)} \quad (3.48c)$$

$$= \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k - \alpha}. \quad (3.48d)$$

Dabei wurde die Substitution $t = a + u(x - a)$ und [Gl. \(2.29\)](#) benutzt. Dies wiederholen wir mit $k > n - 1$ für die Caputo Ableitung.

$${}_a^C D_x^\alpha (x - a)^k = \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(k - n + 1)} \int_a^x (t - a)^{k - n} (x - t)^{n - 1 - \alpha} dt \quad (3.49a)$$

$$= \frac{\Gamma(k + 1) (x - a)^{k - \alpha}}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(k - n + 1)} \int_0^1 u^{k - n} (1 - u)^{n - 1 - \alpha} du \quad (3.49b)$$

$$= \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k - \alpha}. \quad (3.49c)$$

(c). Es seien $\beta > \alpha > 0$, sowie $n > \alpha > n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ und $f \in L^1(a, b)$. Wir benutzen [Satz 3.5 \(c\)](#)

und Satz 2.5. Es folgt

$${}_a D_x^\alpha {}_a I_x^\beta f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[{}_a I_x^{n-\alpha} {}_a I_x^\beta f \right] (x) \quad (3.50a)$$

$$= \frac{d^n}{dx^n} \left[{}_a I_x^{\beta-\alpha+n} f \right] (x) \quad (3.50b)$$

$$= \frac{d^n}{dx^n} {}_a I_x^n \left[{}_a I_x^{\beta-\alpha} f \right] (x) = {}_a I_x^{\beta-\alpha} f(x) \quad \text{für fast alle } x \in [a, b]. \quad (3.50c)$$

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in AC^n([a, b])$. Zuerst benutzen wir Satz 2.5, sodass ${}_a I_x^1 f \in AC^{n+1}([a, b])$. Nach Definition 3.9 ist

$${}_a D_x^n f(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} {}_a I_x^1 f(x) = f^{(n)}(x), \quad \text{für fast alle } x \in [a, b]. \quad (3.51)$$

□

Die Version von Satz 3.11 (c) für die Caputo Ableitung braucht stärkere Voraussetzungen. Dies macht

Satz 3.12. Für $f \in L^1(a, b)$, sowie $\beta > \alpha > 0$ und $\beta \geq n$, mit $n - 1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$${}_a^C D_x^\alpha {}_a I_x^\beta f(x) = {}_a I_x^{\beta-\alpha} f(x). \quad (3.52)$$

für fast alle $x \in [a, b]$

Beweis. Es ist $\beta - n \geq 0$, damit können wir Satz 3.5 benutzen. Es folgt

$${}_a^C D_x^\alpha {}_a I_x^\beta f(x) = {}_a I_x^{n-\alpha} {}_a I_x^{\beta-n} f(x) = {}_a I_x^{\beta-\alpha} f(x), \quad \text{für fast alle } x \in [a, b] \quad (3.53)$$

□

Diese Vorarbeit reicht aus um zu zeigen, dass die Definitionen der fraktionalen Ableitungen nicht gleich ist. Wir zeigen

Satz 3.13. Für $f \in AC^n([a, b])$ und $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Gleichungen

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha} \quad (3.54)$$

und

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha \left[f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k + 1)} (\cdot - a)^k \right] (x) \quad (3.55)$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n - 1 < \alpha \leq n$. Wir betrachten eine Funktion $f \in AC^n([a, b])$. Nach dem Satz von Taylor mit Integralrestglied gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) dt \quad (3.56)$$

Mit [Satz 3.11](#) und [Gl. \(3.56\)](#) folgt

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} {}_a D_x^\alpha (x-a)^k + {}_a D_x^\alpha [{}_a I_x^n f^{(n)}](x) \quad (3.57a)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} + {}_a I_x^{n-\alpha} [f^{(n)}](x) \quad (3.57b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} + {}_a^C D_x^\alpha f(x). \quad (3.57c)$$

Durch umstellen folgt die erste Gleichung. Für die zweite betrachten wir [Gl. \(3.57a\)](#). Anstatt die Riemann–Liouville Ableitung für das Polynom auszuführen stellen wir um und nutzen die Linearität der Ableitung. Weiterhin gilt ${}_a D_x^\alpha [{}_a I_x^n f^{(n)}](x) = {}_a^C D_x^\alpha f(x)$, woraus die zweite Gleichung folgt. $\square$

[Satz 3.13](#) erlaubt es uns unsere Ergebnisse für die Riemann–Liouville Ableitung zu benutzen um Eigenschaften der Caputo Ableitung zu beweisen. Eine Anwendung ist

Satz 3.14. Für $n \in \mathbb{N}$ und $f \in AC^n([a, b])$ ist ${}_a^C D_x^n f(x) = f^{(n)}(x)$ für fast alle $x \in [a, b]$.

Beweis. Wir benutzen [Satz 3.11](#) und [Satz 3.13](#). Es folgt

$${}_a^C D_x^n f(x) = {}_a D_x^n [f - p_{n-1}](x) = f^{(n)}(x), \quad \text{für fast alle } x \in [a, b], \quad (3.58)$$

wobei p_{n-1} ein Polynom $n - 1$ -ten Grades ist und die n -te Ableitung entsprechend verschwindet. $\square$

Später wollen wir uns mit fraktionalen Differentialgleichungen beschäftigen. Dazu wollen wir uns die Laplace-Transformation von fraktionalen Ableitungen anschauen. Bevor wir eine Formel für diese Transformation hinschreiben gibt es eine

Bemerkung 3.15. Wir können nach [?? 3.4](#) das fraktionale Integral als Faltung aufschreiben. Damit sieht die Riemann–Liouville fraktionale Ableitung wie folgt aus

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt = \frac{d^n}{dx^n} [\iota_\alpha * f](x), \quad (3.59)$$

mit $\iota_\alpha(x) = \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ und $x_+ = \max\{0, x\}$

Zusätzlich werden wir im folgenden $a = 0$ setzen. Damit gilt für die Laplace-Transformation

Satz 3.16. Für $f \in L^1(0, b)$, sodass ${}_0I_x^{n-\alpha} f \in AC^n([0, b])$ und $({}_0I_x^\alpha f)^{(n)}$ Laplace-transformierbar, mit $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{L}[{}_0D_x^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}_0D_x^{\alpha-k-1} f(0). \quad (3.60)$$

Außerdem sind die Ausdrücke ${}_0D_x^{\alpha-k-1} f(0) \in \mathbb{R}$ eindeutig.

Beweis. Sei $f \in L^1(0, b)$, sodass ${}_0I_x^{n-\alpha} f \in AC^n([0, b])$, für $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen die Eigenschaften aus Satz 2.6 benutzen. Diese sind $\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k)}(0)$, sowie die Faltungseigenschaft $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$. Damit gilt

$$\mathcal{L}[{}_0D_x^\alpha f](s) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} s^n \mathcal{L}[x^{n-1-\alpha}] \cdot \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{n-1-k}}{dx^{n-1-k}} {}_0I_x^{n-1-k-(\alpha-k-1)} f(x) \Big|_{x=0} \quad (3.61a)$$

$$= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}_0D_x^{\alpha-k-1} f(0). \quad (3.61b)$$

Dabei haben wir $\mathcal{L}[x^{n-1-\alpha}](s) = \Gamma(n-\alpha)/s^{n-\alpha}$, sowie die Definition 3.9 benutzt. Nun betrachten wir ${}_0D_x^{\alpha-k-1} f(0)$. Nach Voraussetzung ist ${}_0I_x^{n-\alpha} f \in AC^n([0, b])$. Damit ist $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} {}_0I_x^{n-\alpha} f \in AC([0, b])$ und insbesondere stetig. Durch Anwendung von Satz 2.5 folgt

$${}_0D_x^{\alpha-k-1} f(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} {}_0I_x^k [{}_0I_x^{n-\alpha} f](x) \in AC^k([0, b]), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.62)$$

Damit sind ${}_0D_x^{\alpha-k-1} f$ für $k \geq 0$ stetig auf $[0, b]$ und wir können $x = 0$ einsetzen. $\square$

Nun wollen wir die Laplace-Transformation für die Caputo Ableitung untersuchen.

Satz 3.17. Für $f \in AC^n([0, b])$ mit $f^{(n)}$ Laplace-transformierbar und $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{L}[{}_0^C D_x^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (3.63)$$

Beweis. Wir benutzen wie im vorherigem Satz die Faltungseigenschaft, sowie die Laplace-Transformation der Ableitung. Wir erhalten

$$\mathcal{L}[{}_0^C D_x^\alpha f](s) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \mathcal{L}[x^{n-1-\alpha}] \cdot \mathcal{L}[f^{(n)}](s) \quad (3.64a)$$

$$= s^{\alpha-n} \cdot \left(s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k)}(0) \right) \quad (3.64b)$$

$$= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (3.64c)$$

Nach Umsortieren folgt

$$\mathcal{L} \left[{}_0^C D_x^\alpha f \right] (s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (3.65)$$

□

Damit wollen wir dieses Kapitel über fraktionale Ableitungen abschließen. Im nächsten Kapitel wollen wir das Bewiesene an fraktionalen Differentialgleichungen anwenden.

Kapitel 4

Fraktionale Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wollen wir die fraktionalen Ableitungen aus den vorangegangenen Kapiteln benutzen um Differentialgleichungen zu definieren und diese zu lösen. Dazu betrachten wir ein kompaktes Intervall $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$. Dies wird uns erlauben die Laplace-Transformation zu benutzen und einen Lösungsvorschlag zu bekommen. Die Methodik wurde dabei von [13, Kapitel 4] übernommen. Im folgenden Kapitel werden wir eine Funktion f Laplace-transformierbar nennen, falls f exponentiell beschränkt ist gemäß Gl. (2.20), sofern f auf $[0, \infty)$ definiert ist. Falls $f \in L^1(0, T)$ und nicht Laplace-transformierbar ist setzen wir $f(x) = 0$ für $x > T$ um die Laplace-Transformierbarkeit zu gewährleisten.

4.1 Die Differentialgleichung $D^\alpha y = \lambda y$

Im Allgemeinen kann eine fraktionale Differentialgleichung der Ordnung α eine komplizierte Form annehmen, wie zu Beispiel

$${}_a D_x^\alpha y(x) = f(x, y, {}_a D_x^{\beta_1}, \dots), \quad (4.1)$$

wobei wir beliebig viele Ableitungen der Ordnung $\beta_i < \alpha$ in f einsetzen können. Wir wollen daher eine kleine Klasse von fraktionalen Differentialgleichungen betrachten. Im folgenden wollen wir auch die untere Grenze $a = 0$ setzen. Dies ermöglicht es uns unser Wissen zu Laplace-Transformationen anzuwenden. Dies ist keine Einschränkung, wie folgende Rechnung zeigt

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - t)^{n-1-\alpha} f(t) dt \quad (4.2a)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^{x-a} (x - a - t)^{n-1-\alpha} f(t + a) dt \quad (4.2b)$$

$$= {}_0 D_x^\alpha [f(\cdot + a)](x - a). \quad (4.2c)$$

Wir können also ${}_0D_x^\alpha g(x-a) = {}_aD_x^\alpha f(x)$ betrachten mit $g(x) = f(x+a)$. Das gleiche folgt auch für die Caputo Ableitung. Weiter werden wir das folgende Lemma benutzen, um die Konvergenz von Reihen in diesem Kapitel zu zeigen.

Lemma 4.1. Für $\alpha > 0$ ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)} = 0. \quad (4.3)$$

Beweis. Sei $\alpha > 0$. Wir benutzen die Stirling-Approximation Gl. (2.28) für die Gammafunktion. Es folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\alpha+1)} \cdot 1 \cdot 1 \quad (4.4a)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x}{\sqrt{2\pi(x+\alpha)} \left(\frac{x+\alpha}{e}\right)^{x+\alpha}} \quad (4.4b)$$

$$\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{x^{x+\alpha}} = 0. \quad (4.4c)$$

□

4.1.1 Riemann–Liouville Differentialgleichungen

Zuerst wollen wir Riemann–Liouville Differentialgleichung untersuchen. Diese haben für $n-1 < \alpha \leq n$, mit $n \in \mathbb{N}$ die entsprechenden Anfangsbedingungen

$${}_0D_x^{\alpha-k-1}y(0) = b_{n-1-k}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (4.5)$$

Bemerkung 4.2. In Gl. (4.5) gilt für $k = n-1$, dass $0 \geq \alpha - k - 1 > -1$. Nach Definition 3.9 benutzen wir

$${}_0D_x^{\alpha-k-1}y(x) = {}_0D_x^{\alpha-n}y(x) = \frac{d^0}{dx^0} {}_0I_x^{n-\alpha}y(x) = {}_0I_x^{n-\alpha}y(x), \quad (4.6)$$

wobei wir $\frac{d^0}{dx^0} := 1$ definieren.

Nun wollen wir definieren, welche Probleme wir betrachten und was wir unter einer Lösung verstehen. Allgemein betrachten wir Gleichungen der Form

$${}_0D_x^\alpha y(x) = F(x, y(x)), \quad (4.7)$$

mit einer messbaren Funktion $F : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir fassen zusammen

Definition 4.3. Für $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ und einer messbaren Funktion $F : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sowie $b_{n-1-k} \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n-1$ ist das betrachtete Problem von der Form

$$\begin{aligned} {}_0D_x^\alpha y(x) &= F(x, y(x)), & x \in [0, T] \\ {}_0D_x^{\alpha-k-1}y(0) &= b_{n-1-k} & k = 0, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wir nennen $y \in L^1(0, T)$ eine Lösung von Gl. (4.8), falls ${}_0D_x^\alpha y \in L^1(0, T)$ und

$${}_0D_x^\alpha y(x) = F(x, y(x)), \quad \text{für fast alle } x \in [0, T], \quad (4.9)$$

sowie

$${}_0D_x^{\alpha-k-1}y(0) = b_{n-1-k} \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (4.10)$$

In der obigen Definition fordern wir, dass ${}_0D_x^{\alpha-k-1}y(0)$ einsetzbar ist. Dies erfordert nach Satz 3.16 ${}_0I_x^{n-\alpha}y \in AC^n([a, b])$. Falls dies für ein $y \in L^1(0, T)$ erfüllt ist, gilt dies auch für alle anderen Funktionen $\tilde{y} \in L^1(0, T)$, für die $\|y - \tilde{y}\|_1 = 0$ ist. Wir müssen zeigen, dass ${}_0I_x^{n-\alpha}y(x) = {}_0I_x^{n-\alpha}\tilde{y}(x)$ für alle $x \in [0, T]$. Sei dazu $x \in [0, T]$, wir benutzen die Linearität des fraktionalen Integrals

$$|{}_0I_x^\alpha y(x) - {}_0I_x^\alpha \tilde{y}(x)| \leq {}_0I_x^\alpha [|y - \tilde{y}|](x). \quad (4.11)$$

Nun sind y und $\tilde{y}$ fast überall gleich, woraus ${}_0I_x^\alpha [|y - \tilde{y}|](x) = 0$ für alle $x \in [0, T]$ folgt. Damit sind die Anfangsbedingungen sinnvoll definiert. Um die Laplace-Methode vorzustellen beweisen wir

Satz 4.4. *Für ein Laplace-transformierbares $f \in L^1(0, T)$, sowie $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung*

$${}_0D_x^\alpha y(x) = f(x) \quad (4.12)$$

für die Anfangsbedingungen mit $b_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n-1$

$${}_0D_x^{\alpha-k-1}y(0) = b_{n-1-k}, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (4.13)$$

die eindeutige Lösung

$$y(x) = {}_0I_x^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-1-k}}{\Gamma(\alpha-k)} x^{\alpha-k-1}. \quad (4.14)$$

Beweis. Um den Satz zu beweisen könnten wir direkt zeigen, dass Gl. (4.14) eine Lösung ist. Allerdings wollen wir in diesem Kapitel die Laplace-Transformation benutzen. Daher machen wir zuerst einen Lösungsvorschlag. Sei dazu $n-1 < \alpha \leq n$. Wir benutzen Satz 3.16 um Gl. (4.12) zu transformieren. Wir erhalten

$$s^\alpha \mathcal{L}[y](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}_0D_x^{\alpha-k-1}y(0) = \mathcal{L}[f](s). \quad (4.15)$$

Wir stellen um und benutzen die Anfangsbedingungen aus Gl. (4.5), damit folgt

$$\mathcal{L}[y](s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f](s) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k} s^{k-\alpha}. \quad (4.16)$$

Eine inverse Laplace-Transformation führt auf

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-1-k}}{\Gamma(\alpha-k)} x^{\alpha-k-1}. \quad (4.17)$$

Mit dem obigen Ausdruck und [Satz 3.5](#) folgt direkt, dass $y \in L^1(0, T)$.

Nun zeigen wir, dass dieses y eine Lösung von [Gl. \(4.12\)](#) ist. Es ist $\alpha - k - 1 \geq \alpha - n > -1$. Wir dürfen daher die Ableitungsregel für Polynome [Satz 3.11](#) verwenden. Es folgt für $k, i = 0, \dots, n-1$

$${}_0D_x^{\alpha-i-1} \frac{x^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} = \frac{x^{i-k}}{\Gamma(i-k+1)} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < k \\ 1 & \text{für } i = k \\ \frac{x^{i-k}}{\Gamma(i-k+1)} & \text{für } i > k \end{cases} \quad (4.18)$$

Wir haben dabei $\frac{1}{\Gamma(-m)} = 0$ für $m \in \mathbb{N}_0$ benutzt. Nun setzen wir [Gl. \(4.17\)](#) in [Gl. \(4.12\)](#) ein. Mit obigen Überlegungen ist $\alpha = \alpha + 1 - 1$ und damit $i = -1 < k$, es folgt, dass die Ableitungen von $x^{\alpha-k-1}$ verschwinden woraus mit der Linearität der fraktionalen Ableitung

$${}_0D_x^\alpha y(x) = {}_0D_x^\alpha {}_0I_x^\alpha f(x) + {}_0D_x^\alpha \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-1-k}}{\Gamma(\alpha-k)} x^{\alpha-k-1} \right] \quad (4.19a)$$

$$= {}_0D_x^\alpha {}_0I_x^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-1-k}}{\Gamma(\alpha-k)} {}_0D_x^\alpha x^{\alpha-k-1} \quad (4.19b)$$

$$= \frac{d^n}{dx^n} {}_0I_x^n f(x) = f(x), \quad \text{für fast alle } x \in [0, T] \quad (4.19c)$$

folgt. Weiter ist ${}_0D_x^{\alpha-i-1} [x^{\alpha-k-1}](0) = 1$ für $i = k$. Zusätzlich ist

$${}_0D_x^{\alpha-k-1} {}_0I_x^\alpha f(x) = {}_0I_x^{k+1} f(x) \quad (4.20)$$

stetig, mit ${}_0I_x^{k+1} f(0) = 0$, sodass die Anfangsbedingungen [Gl. \(4.5\)](#) erfüllt werden. Damit ist $y(x)$ eine Lösung.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen nehmen wir an, dass y_1 und y_2 zwei Lösungen sind. Aus der Linearität der fraktionalen Ableitung folgt, dass $u = y_1 - y_2$ die Gleichung

$${}_0D_x^\alpha u(x) = 0, \quad \text{für fast alle } x \in [0, T], \quad (4.21)$$

mit den Anfangsbedingungen

$${}_0D_x^{\alpha-k-1} u(0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (4.22)$$

löst. Wir haben damit $s^\alpha \mathcal{L}[u] = 0$, woraus $\mathcal{L}[u] = 0$ folgt. Mit der Injektivität der Laplace-Transformation folgt, dass $u = 0$. Damit ist $y_1(x) = y_2(x)$ für fast alle $x \in [0, T]$, womit die Eindeutigkeit gezeigt ist. $\square$

Nachdem wir die Methode der Laplace-Transformation vorgestellt haben wollen wir die Lösung der Differentialgleichung ${}_0D_x^\alpha y(x) = \lambda y(x)$ mit den entsprechenden Anfangsbedingungen lösen.

Satz 4.5. Für $\alpha > 0$, $\lambda \neq 0$, sowie $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ und $b_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n - 1$ wird die fraktionale Differentialgleichung

$${}_0D_x^\alpha y(x) = \lambda y(x) \quad (4.23)$$

mit den entsprechenden Anfangsbedingungen

$${}_0D_x^{\alpha-k-1} y(0) = b_{n-1-k}, \quad k = 0, \dots, n - 1. \quad (4.24)$$

durch

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k} x^{\alpha-k-1} E_{\alpha, \alpha-k}(\lambda x^\alpha) \quad (4.25)$$

eindeutig gelöst.

Beweis. Wie im obigen Beweis benutzen wir Laplace-Transformation um einen Lösungsvorschlag zu bekommen und prüfen, ob dieser eine Lösung ist. Für $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir, nachdem wir die Anfangsbedingungen eingesetzt haben

$$s^\alpha \mathcal{L}[y](s) - \lambda \mathcal{L}[y](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k b_{n-1-k} = 0. \quad (4.26)$$

Wir stellen um und erhalten

$$\mathcal{L}[y](s) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k} \frac{s^k}{s^\alpha - \lambda}, \quad (4.27)$$

Ein Vergleich mit der Laplace-Transformation der Mittag-Leffler Funktion liefert

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k} x^{\alpha-k-1} E_{\alpha, \alpha-k}(\lambda x^\alpha). \quad (4.28)$$

Als nächstes überprüfen wir, ob y tatsächlich eine Lösung von Gl. (4.25) ist und die Anfangsbedingungen Gl. (4.5) erfüllt. Dazu zeigen wir zuerst, dass $y \in L^1(0, T)$. Wir betrachten die einzelnen Summanden von Gl. (4.25). Mit der Definition der Mittag-Leffler Funktion Gl. (2.31) folgt

$$y_k(x) := b_{n-1-k} x^{\alpha-k-1} E_{\alpha, \alpha-k}(\lambda x^\alpha) = b_{n-1-k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha(i+1)-k-1}}{\Gamma(\alpha(i+1)-k)}. \quad (4.29)$$

Weiter ist

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha(i+1)-k-1}}{\Gamma(\alpha(i+1)-k)} \right| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \frac{\lambda^i x^{\alpha(i+1)-k-1}}{\Gamma(\alpha(i+1)-k)} \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \frac{|\lambda|^i |x|^{\alpha(i+1)-k-1}}{|\Gamma(\alpha(i+1)-k)|} \quad (4.30)$$

und damit

$$\int_0^T \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha(i+1)-k-1}}{\Gamma(\alpha(i+1)-k)} \right| dx \leq \int_0^T \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \frac{|\lambda|^i x^{\alpha(i+1)-k-1}}{|\Gamma(\alpha(i+1)-k)|} dx. \quad (4.31)$$

Nach dem Satz der monotonen Konvergenz [Satz 2.2](#) folgt

$$\int_0^T \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \frac{|\lambda|^i x^{\alpha(i+1)-k-1}}{|\Gamma(\alpha(i+1)-k)|} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \sum_{i=0}^m \frac{|\lambda|^i x^{\alpha(i+1)-k-1}}{|\Gamma(\alpha(i+1)-k)|} dx \quad (4.32a)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^T \frac{|\lambda|^i x^{\alpha(i+1)-k-1}}{|\Gamma(\alpha(i+1)-k)|} dx \quad (4.32b)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^i T^{\alpha(i+1)-k}}{\Gamma(\alpha(i+1)-k+1)} =: \sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad (4.32c)$$

Wir wollen die Konvergenz mit dem Quotientenkriterium nachweisen. Wir haben

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = |\lambda| T^{2\alpha} \frac{\Gamma(\alpha(i+1)-k+1)}{\Gamma(\alpha(i+2)-k+1)} \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty), \quad (4.33)$$

wobei wir [Lemma 4.1](#) benutzt haben. Mit dem Quotientenkriterium folgt die absolute Konvergenz und damit $y_k \in L^1(0, T)$. Da y sich als endliche Summe von y_k zusammensetzt folgt $y \in L^1(0, T)$.

Als nächstes zeigen wir ${}_0I_x^{n-\alpha} y_k \in AC^n([0, T])$. Dazu zeigen wir $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} {}_0I_x^{n-\alpha} y_k \in AC([0, T])$. Durch die Beschränktheit von ${}_0I_x^{n-\alpha}$ und $y_k \in L^1(0, T)$ folgt durch vertauschen von Reihe und fraktionalem Integral

$${}_0I_x^{n-\alpha} y_k(x) = {}_0I_x^{n-\alpha} \left[\sum_{i=0}^{\infty} b_{n-1-k} \frac{\lambda^i x^{\alpha(i+1)-k-1}}{\Gamma(\alpha(i+1)-k)} \right] = b_{n-1-k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + n - k - 1}}{\Gamma(\alpha i + n - k)}. \quad (4.34)$$

Nun leiten wir ab. Es folgt

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} {}_0I_x^{n-\alpha} y_k(x) = b_{n-1-k} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + n - k - 1}}{\Gamma(\alpha i + n - k)} \quad (4.35a)$$

$$= b_{n-1-k} \left[\underbrace{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)!}}_{=c \in \{0,1\}} + \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{\lambda x^{\alpha + n - k - 1}}{\Gamma(\alpha + n - k)}}_{=\lambda x^{\alpha-k}/\Gamma(\alpha-k+1)} + \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + n - k - 1}}{\Gamma(\alpha i + n - k)}}_{=:S} \right]. \quad (4.35b)$$

Wir betrachten die Summe S . Wir zeigen, dass $S \in C^n([0, T])$. Der Raum $C^n([0, T])$ ist mit der Norm $\|f\|_{C^n([0, T])} := \sum_{l=0}^n \max_{x \in [0, T]} |f^{(l)}(x)|$ ein Banachraum. Wir zeigen absolute konvergenz bezüglich dieser Norm. Es ist $2\alpha - k \geq 0$, damit ist

$$\|S\|_{C^n([0, T])} \leq \sum_{l=0}^n \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|\lambda|^i T^{\alpha i + n - k - l - 1}}{\Gamma(\alpha i + n - k - l)} < \infty, \quad (4.36)$$

wobei die Konvergenz der Reihen wieder durch das Quotientenkriterium mit [Lemma 4.1](#) folgt. Damit ist $S \in C^n([0, T]) \subset AC^n([0, T])$. Außerdem ist $\lambda x^{\alpha-k}/\Gamma(\alpha - k + 1) \in AC([0, T])$ und damit folgt $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} {}_0I_x^{n-\alpha} y_k \in AC([0, T])$. Wir können damit für $k = 0, \dots, n-1$ und $m = 0, \dots, n-1$ die Anfangsbedingungen und die fraktionale Differentialgleichung überprüfen. Wir erhalten

$$\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} {}_0I_x^{n-\alpha} y_k(x) = b_{n-k-1} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + n - k - 1}}{\Gamma(\alpha i + n - k)} \quad (4.37a)$$

$$= b_{n-k-1} \left[\frac{x^{m-k}}{\Gamma(m-k+1)} + \frac{\lambda x^{\alpha+m-k}}{\Gamma(\alpha+m-k+1)} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + m - k}}{\Gamma(\alpha i + m - k + 1)} \right]. \quad (4.37b)$$

Wir betrachten zuerst $m = -1$. Mit den obigen Überlegungen folgt

$${}_0D_x^\alpha [b_{n-k-1} x^{\alpha-k-1} E_{\alpha, \alpha-k}(\lambda x^\alpha)] = \lambda b_{n-k-1} x^{\alpha-k-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1} x^{\alpha(i-1)}}{\Gamma(\alpha i - k)} = \lambda b_{n-k-1} x^{\alpha-k-1} E_{\alpha, \alpha-k}(\lambda x^\alpha) \quad (4.38)$$

für alle $x \in (0, T]$ und damit insbesondere für fast alle $x \in [0, T]$. Damit ist ${}_0D_x^\alpha y(x) = \lambda y(x)$ für fast alle $x \in [0, T]$. Wir überprüfen nun die Anfangsbedingungen. Für $0 \leq m \leq n-1$ ergibt sich

$${}_0D_x^\alpha [b_{n-k-1} x^{\alpha-k-1} E_{\alpha, \alpha-k}(\lambda x^\alpha)](0) \stackrel{\alpha > n-1}{=} \frac{b_{n-k-1} x^{m-k}}{\Gamma(m-k+1)} \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq k, \\ b_{n-k-1} & \text{für } m = k. \end{cases} \quad (4.39)$$

Es folgt, dass y die Anfangsbedingungen erfüllt.

Für die Eindeutigkeit betrachten wir wieder zwei Lösungen y_1 und y_2 . Wir definieren $u = y_1 - y_2$. Dieses u erfüllt die Differentialgleichung

$${}_0D_x^\alpha u(x) = \lambda u(x), \quad (4.40)$$

mit den Anfangsbedingungen

$${}_0D_x^{\alpha-k-1} u(0) = 0, \text{ für } k = 0, \dots, n-1. \quad (4.41)$$

Nach Laplace-Transformation folgt $s^\alpha \mathcal{L}[u](s) - \lambda \mathcal{L}[u](s) = 0$ und damit $\mathcal{L}[u] = 0$, woraus mit der Injektivität der Laplace-Transformation $u = 0$, und damit $y_1(x) = y_2(x)$ für fast alle $x \in [0, T]$ folgt. $\square$

Nun wollen wir die gleichen Differentialgleichungen für die Caputo Ableitung betrachten.

4.1.2 Caputo-Differentialgleichungen

Wie im vorherigen Kapitel übernehmen wir die Anfangsbedingungen aus der Laplace-Transformation der Ableitung für $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ durch

$$y^{(k)}(0) = b_k \quad k = 0, \dots, n - 1. \quad (4.42)$$

Auch hier wollen wir definieren, was wir unter einer Lösung verstehen.

Definition 4.6. Für $n - 1 < \alpha \leq n$ und $b_k \in \mathbb{R}$ für $k = 0, \dots, n - 1$, sowie eine messbare Funktion $F : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_x^\alpha y(x) &= F(x, y(x)), & x \in (0, T] \\ y^{(k)}(0) &= b_k, & k = 0, \dots, n - 1. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Wir nennen $y \in AC^n([0, T])$ eine Lösung von Gl. (4.43), falls

$${}^C_0 D_x^\alpha y(x) = F(x, y(x)) \quad \text{für alle } x \in (0, T] \quad (4.44)$$

und

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, \dots, n - 1. \quad (4.45)$$

Auch hier wollen wir zuerst die Methode der Laplace-Transformation an einem einfachen Beispiel zeigen.

Satz 4.7. Für ein Laplace-transformierbares $f \in C([0, T])$ und $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung

$${}^C_0 D_x^\alpha y(x) = f(x) \quad (4.46)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, \dots, n - 1, \quad (4.47)$$

die eindeutige Lösung

$$y(x) = {}_0 I_x^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} \quad (4.48)$$

Beweis. Wir beginnen mit der Laplace-Transformation einen Lösungsvorschlag herzuleiten. Sei dazu $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Die Laplace-Transformation ergibt sich aus Satz 3.17. Es folgt

$$\mathcal{L}[y](s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f](s) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{s^{k+1}}. \quad (4.49)$$

Die Rücktransformation führt auf

$$y(x) = {}_0 I_x^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^k}{\Gamma(k+1)}. \quad (4.50)$$

Nach Voraussetzung ist $f \in C([0, T])$ und damit folgt nach [Satz 3.7](#), dass ${}_0I_x^\alpha f \in AC^n([0, T])$.

Die Anfangsbedingungen ergeben sich durch

$$\left(\frac{d^k}{dx^k} {}_0I_x^\alpha f \right)(0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (4.51)$$

sowie $\frac{d^k}{dx^k} x^i \big|_{x=0} = \delta_{ik}$, woraus mit [Satz 3.13](#)

$${}_0^C D_x^\alpha \left[{}_0I_x^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} \right] = {}_0D_x^\alpha \left[{}_0I_x^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^k - x^k}{\Gamma(k+1)} - \left(\frac{d^k}{dx^k} {}_0I_x^\alpha f \right)(0) \right] \quad (4.52)$$

$$= {}_0D_x^\alpha {}_0I_x^\alpha f(x) = f(x) \quad (4.53)$$

für alle $x \in [0, T]$ folgt. Damit ist das gefundene y eine Lösung von [Gl. \(4.46\)](#) mit den Anfangsbedingungen [Gl. \(4.42\)](#).

Für den Eindeutigkeitsbeweis betrachten wir zwei Lösungen y_1, y_2 und damit folgt für $u = y_1 - y_2$, dass

$${}_0^C D_x^\alpha u(x) = 0, \quad \text{mit} \quad u^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (4.54)$$

Für alle $x \in [0, T]$. Die Laplace-Transformation führt auf

$$s^\alpha \mathcal{L}[u] = 0, \quad (4.55)$$

woraus $\mathcal{L}[u] = 0$ folgt. Aufgrund der Injektivität der Laplace-Transformation folgt $u(x) = 0$ und damit $y_1(x) = y_2(x)$ für alle $x \in [0, T]$. $\square$

Bemerkung 4.8. In [Satz 4.4](#) haben wir $f \in L^1(0, T)$ gefordert. Dies können wir nicht für [Satz 4.7](#) machen, wie das folgende Beispiel zeigt. Wir wählen $f(x) = x^{-1/2}$ und $\alpha = 1/3$, es ist $f \in L^1(0, T)$. Nach Rechnung folgt

$${}_0I_x^{1/3} x^{-1/2} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/6)} x^{-1/6}. \quad (4.56)$$

Damit ist $\lim_{x \rightarrow 0} {}_0I_x^{1/3} x^{-1/2} = \infty$ insbesondere ungleich null. Wir können die Anfangsbedingungen [Gl. \(4.42\)](#) von [Gl. \(4.46\)](#) nicht erfüllen. Daher können wir nicht für jedes $f \in L^1(0, T)$ eine Lösung von [Gl. \(4.46\)](#) finden.

Nun wollen wir auch für die Caputo Ableitung die Differentialgleichung ${}_0^C D_x^\alpha y(x) = \lambda y(x)$ mit den entsprechenden Anfangsbedingungen lösen.

Satz 4.9. Für $\alpha > 0$, $\lambda \neq 0$ und $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ wird die fraktionale Differentialgleichung

$${}_0^C D_x^\alpha y(x) = \lambda y(x) \quad (4.57)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (4.58)$$

durch

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k E_{\alpha, k+1}(\lambda x^\alpha) \quad (4.59)$$

eindeutig gelöst.

Beweis. Wie bei den schon vorausgegangenen Sätzen benutzen wir die Laplace-Transformation. Sei $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Für die Differentialgleichung

$${}_0^C D_x^\alpha y(x) = \lambda y(x) \quad (4.60)$$

lautet die Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}[y](s) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda}, \quad (4.61)$$

woraus durch Rücktransformation

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k E_{\alpha, k+1}(\lambda x^\alpha) =: \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x) \quad (4.62)$$

folgt.

Wir überprüfen zuerst, ob unser Lösungsvorschlag $y \in AC^n([0, T])$ erfüllt. Dazu zeigen wir $y^{(n-1)} \in AC([0, T])$. Wir machen den Ansatz mit $m \in \mathbb{N}$, sodass $\alpha m > n$ und damit

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y_k(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \sum_{i=0}^{\infty} b_k \frac{\lambda^i x^{\alpha i + k}}{\Gamma(\alpha i + k + 1)} \quad (4.63a)$$

$$= b_k \left[\underbrace{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)}}_{=: c \in \{0,1\}} + \sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + k}}{\Gamma(\alpha i + k + 1)}}_{= \lambda x^{\alpha i - n + k + 1} / \Gamma(\alpha i - n + k + 2)} + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \underbrace{\sum_{i=m}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + k}}{\Gamma(\alpha i + k + 1)}}_{=: S} \right] \quad (4.63b)$$

Wir zeigen, dass S in $C^n([0, T])$ absolut konvergent ist. Wir haben mit $m\alpha - n \geq 0$

$$\|S\|_{C^n([0, T])} \leq \sum_{l=0}^n \sum_{i=m}^{\infty} \frac{|\lambda|^i T^{\alpha i - l + k}}{\Gamma(\alpha i - l + k + 1)} < \infty, \quad (4.64)$$

wobei die Konvergenz der einzelnen Reihen ähnlich zu dem Argument aus [Satz 4.5](#) mit dem Quotientenkriterium und [Lemma 4.1](#) folgt. Damit ist $S \in C^n([0, T]) \subset AC^n([0, T])$. Weiter sind für $i = 1, \dots, m-1$ die Potenzen $\alpha i - n + 1 > -1$ und damit ist $\lambda x^{\alpha i - n + k + 1} / \Gamma(\alpha i - n + k + 2) \in AC([0, T])$. Insgesamt ist $y_k \in AC^n([0, T])$, woraus $y \in AC^n([0, T])$ folgt.

Wir überprüfen wieder die Anfangsbedingungen, sowie ob y tatsächlich [Gl. \(4.57\)](#) löst. Wir betrachten $0 \leq m \leq n$ und damit

$$\frac{d^m}{dx^m} b_k x^k E_{\alpha, k+1}(\lambda x^\alpha) = b_k \frac{d^m}{dx^m} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + k}}{\Gamma(\alpha i + k + 1)} \quad (4.65a)$$

$$= b_k \frac{x^{k-m}}{\Gamma(k-m+1)} + b_k \frac{\lambda x^{\alpha-m+k}}{\Gamma(\alpha + k - m + 1)} + b_k \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + k - m}}{\Gamma(\alpha i + k - m + 1)}. \quad (4.65b)$$

Um die Anfangsbedingungen zu überprüfen betrachten wir $0 \leq m \leq n-1$. Mit $\alpha - m > 0$ folgt

$$\frac{d^m}{dx^m} b_k x^k E_{\alpha, k+1}(\lambda x^\alpha) \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq k, \\ b_k & \text{für } m = k. \end{cases} \quad (4.66)$$

Damit sind die Anfangsbedingungen erfüllt. Nun setzen wir $m = n$. Wir haben schon $y \in AC^n([0, T])$ gezeigt, insbesondere ist nach [Satz 2.5](#) $y^{(n)} \in L^1(0, T)$, womit wir die Caputo Ableitung auswerten können. Es folgt

$${}_0^C D_x^\alpha [b_k x^k E_{\alpha, k+1}(\lambda x^\alpha)] = {}_0 I_x^{n-\alpha} \left[\frac{d^n}{dx^n} b_k x^k E_{\alpha, k+1}(\lambda x^\alpha) \right] \quad (4.67a)$$

$$= b_k {}_0 I_x^{n-\alpha} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + k - n}}{\Gamma(\alpha i + k - n + 1)} \right] \quad (4.67b)$$

$$= \lambda b_k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{\alpha i + k}}{\Gamma(\alpha i + k + 1)} = \lambda b_k x^k E_{\alpha, k+1}(\lambda x^\alpha), \quad (4.67c)$$

wobei wir wieder benutzt haben, dass ${}_0 I_x^{n-\alpha}$ mit einer in $L^1(0, T)$ konvergenten Reihe vertauscht. Dies ist für alle $x \in [0, T]$ möglich. Damit ist gezeigt, dass ${}_0^C D_x^\alpha y(x) = \lambda y(x)$ für alle $x \in [0, T]$ gilt und y eine Lösung von [Gl. \(4.57\)](#) ist.

Zuletzt zeigen wir die Eindeutigkeit der Lösung. Seien y_1 und y_2 zwei Lösungen von [Gl. \(4.57\)](#) mit den gleichen Anfangsbedingungen. Wir definieren $u = y_1 - y_2$. Dieses u erfüllt die Differentialgleichung

$${}_0^C D_x^\alpha u(x) = \lambda u(x), \quad \text{für alle } x \in [0, T], \quad (4.68)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\left(\frac{d^k}{dx^k}u\right)(0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (4.69)$$

Wir betrachten die Laplace-Transformation $s^\alpha \mathcal{L}[u](s) - \lambda \mathcal{L}[u](s) = 0$, sodass $\mathcal{L}[u] = 0$ und mit Injektivität der Laplace-Transformation folgt $u = 0$ und $y_1(x) = y_2(x)$ für alle $x \in [0, T]$. $\square$

Wenn wir nun $D^\alpha - \lambda$ als einen linearen Operator auffassen, dann haben wir mit den obigen Sätzen für beide betrachteten Ableitungen den Kern bestimmt. Die nächste Frage die sich stellt, ist wie Lösungen von $[D^\alpha - \lambda]y = f$ aussehen.

4.2 Die Differentialgleichung $D^\alpha y - \lambda y = f$

Bevor wir die Riemann–Louville- und Caputo Ableitung getrennt betrachten, machen wir einige Vorüberlegungen. Wir betrachten für $n-1 < \alpha \leq n$

$${}_0^{(C)}D_x^\alpha y(x) - \lambda y(x) = f(x). \quad (4.70)$$

Wir nehmen zuerst ein Laplace-transformierbares $f \in L^1(0, T)$ an, und spezifizieren später, welche Regularität für die zwei Ableitungen gelten. Die Laplace-Transformation der beiden Ableitungen enthält den Term $s^\alpha \mathcal{L}[y]$ plus eine Summe, welche die Anfangsbedingungen enthält. Falls y_0 eine Lösung von $D^\alpha y - \lambda y = 0$ ist, erhalten wir

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s^\alpha - \lambda} + \mathcal{L}[y_0](s). \quad (4.71)$$

Dies gilt für beide Ableitungen, daher ist die partikuläre Lösung formal die Gleiche. Diese berechnen wir jetzt. Nach Gl. (2.33) ist $\mathcal{L}[x_+^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x_+^\alpha)](s) = \frac{1}{s^\alpha - \lambda}$ und mit der Faltungsregel

$$\frac{\mathcal{L}[f](s)}{s^\alpha - \lambda} = \mathcal{L}[x_+^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x_+^\alpha) * f](s), \quad (4.72)$$

mit $x_+ = \max\{0, x\}$, wodurch der Lösungsvorschlag für die partikuläre Lösung im Intervall $I = [0, T]$

$$y_{\text{part}}(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(x-t)^\alpha) f(t) dt \quad (4.73)$$

lautet. In der Reihendarstellung sieht diese wie folgt aus

$$y_{\text{part}}(x) = \int_0^x \sum_{i=0}^{\infty} f(t) \frac{\lambda^i (x-t)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))} dt. \quad (4.74)$$

Nun ist für $t \in [0, x]$

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i (x-t)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))} \right| \leq \sum_{j=1}^k \frac{|\lambda|^j (x-t)^{\alpha(j+1)-1}}{\Gamma(\alpha(j+1))} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|\lambda|^i x^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))}, \quad (4.75)$$

wobei $\alpha(k+1) \geq 1$. Die unendliche Reihe ist absolut konvergent im Raum der stetigen Funktionen $C([0, x])$. Damit ist

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} f(\cdot) \chi_{[0, x]}(\cdot) \frac{\lambda^i (x - \cdot)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))} = f(\cdot) \sum_{i=k+1}^{\infty} \chi_{[0, x]}(\cdot) \frac{\lambda^i (x - \cdot)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))} \in L^1(0, T), \quad (4.76)$$

womit wir Integral und Reihe vertauschen dürfen, es folgt

$$\|y_{\text{part}}\|_1 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \|{}_0 I_x^{\alpha(i+1)} f\|_1 \leq \|f\|_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i T^{\alpha(i+1)}}{\Gamma(\alpha(i+1) + 1)} < \infty, \quad (4.77)$$

wobei die Konvergenz der Reihe wieder durch das Quotientenkriterium mit [Lemma 4.1](#) folgt. Es ist $y_{\text{part}} \in L^1(0, T)$. Nun wollen wir die Ableitungen getrennt betrachten. Zuerst zeigen wir

Satz 4.10. Für $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ und ein Laplace-transformierbares $f \in L^1(0, T)$ ist

$$y_{\text{part}}(x) = \int_0^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(x-t)^\alpha) dt \quad (4.78)$$

die partikuläre Lösung von

$${}_0 D_x^\alpha y(x) - \lambda y(x) = f(x). \quad (4.79)$$

Beweis. Sei $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Zusätzlich sei $f \in L^1(0, T)$ gegeben. Die Anfangsbedingungen die y_{part} erfüllen muss sind

$${}_0 D_x^{\alpha-k-1} y_{\text{part}}(0) = 0, \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1. \quad (4.80)$$

Wir zeigen, dass ${}_0 I_x^{n-\alpha} y_{\text{part}} \in AC^n([0, T])$. Wir haben für alle $x \in [0, T]$

$${}_0 I_x^{n-\alpha} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i {}_0 I_x^{\alpha(i+1)} f \right] (x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i {}_0 I_x^{\alpha i + n} f(x), \quad (4.81)$$

wobei wir Reihe und Integral durch die Beschränktheit von ${}_0 I_x^{n-\alpha}$ vertauschen dürfen. Nun wird in [Gl. \(4.81\)](#) nach [Satz 2.5](#) wegen $\alpha i + n \geq n$ über Funktionen ${}_0 I_x^{\alpha i + n} f \in AC^n([0, T])$ summiert. Wir nehmen wieder ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $m\alpha > 1$. Wir teilen auf

$${}_0 I_x^{n-\alpha} y_{\text{part}}(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i {}_0 I_x^{\alpha i + n} f(x)}_{\in AC^n([0, T])} + \underbrace{\sum_{i=m}^{\infty} \lambda^i {}_0 I_x^{\alpha i + n} f(x)}_{=: S}. \quad (4.82)$$

Wir betrachten S und zeigen absolute Konvergenz in $C^n([0, T])$. Dazu benutzen wir [Satz 3.7](#), um mit $m\alpha > 1$ die Ableitung des Integrals auszuwerten. Es folgt

$$\|S\|_{C^n([0, T])} \leq \sum_{l=0}^n \sum_{i=m}^{\infty} |\lambda|^i \|{}_0I_x^{\alpha i + n - l} f\|_{C([0, T])} \quad (4.83a)$$

$$\leq (n+1) \|{}_0I_x^1 f\|_{C([0, T])} \sum_{l=0}^n \sum_{i=m}^{\infty} \frac{|\lambda|^i T^{\alpha i + n - l - 1}}{\Gamma(\alpha i + n - l)} < \infty. \quad (4.83b)$$

Wir haben benutzt, dass $\|{}_0I_x^{\alpha i + n - l} f\|_{C([0, T])} \leq \frac{T^{\alpha i + n - l - 1}}{\Gamma(\alpha i + n - l)} \|{}_0I_x^1 f\|_{C([0, T])}$ und ${}_0I_x^1 f \in C([0, T])$. Die Konvergenz der Reihe folgt dann auch hier mit dem Quotientenkriterium und [Lemma 4.1](#). Insgesamt ist $S \in C^n([0, T])$ und ${}_0I_x^{n-\alpha} y_{\text{part}} \in AC^n([0, T])$.

Nun überprüfen wir die Anfangsbedingungen. Wir setzen allgemein $k = -1, \dots, n-1$. Damit ist

$${}_0D_x^{\alpha-k-1} y_{\text{part}}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i {}_0I_x^{\alpha i + k + 1} f(x) \quad (4.84)$$

Weiter gilt für $k = 0, \dots, n-1$, dass $k+1 \geq 1$ und damit sind die Ordnungen der fraktionalen Integrale der Reihe größer eins. Es folgt ${}_0I_x^{\alpha i + k + 1} f(0) = 0$. Für $k = -1$ haben wir

$${}_0D_x^{\alpha} y_{\text{part}}(x) - \lambda y_{\text{part}}(x) = {}_0D_x^{\alpha} {}_0I_x^{\alpha} f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda i {}_0I_x^{\alpha i} f(x) - \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i+1} {}_0I_x^{\alpha(i+1)} f(x) \quad (4.85a)$$

$$= f(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i+1} {}_0I_x^{\alpha i} f(x) - \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i+1} {}_0I_x^{\alpha i} f(x) \quad (4.85b)$$

$$= f(x), \quad \text{für fast alle } x \in [0, T], \quad (4.85c)$$

wobei wir ${}_0D_x^{\alpha} {}_0I_x^{\alpha} f(x) = f(x)$ für fast alle $x \in [0, T]$ benutzt haben. Somit ist y_{part} die partikuläre Lösung von [Gl. \(4.79\)](#). $\square$

Das gleich wollen wir für die Caputo Ableitung machen es zeigt sich, dass f eine andere Regularität hat.

Satz 4.11. Für $\alpha > 0$, sowie $n-1 < \alpha \leq n$ und ein Laplace-transformierbares $f \in C([0, T])$ ist

$$y_{\text{part}}(x) = \int_0^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(x-t)^{\alpha}) dt \quad (4.86)$$

die partikuläre Lösung von

$${}_0^C D_x^{\alpha} y(x) - \lambda y(x) = f(x). \quad (4.87)$$

Beweis. Sei $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C([0, T])$ gegeben. Auch in diesem Fall muss y_{part} die Anfangsbedingungen

$$\left(\frac{d^k}{dx^k} y_{\text{part}} \right)(0) = 0, \quad \text{für } k = 0, \dots, n - 1 \quad (4.88)$$

erfüllen. Wir zeigen, dass $y_{\text{part}} \in AC^n([0, T])$. Dazu teilen wir y_{part} auf mit $m \in \mathbb{N}$, sodass $m(\alpha + 1) > n$

$$y_{\text{part}}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i {}_0I_x^{\alpha(i+1)} f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i {}_0I_x^{\alpha(i+1)} f(x)}_{\in AC^n([0, T])} + \underbrace{\sum_{i=m}^{\infty} \lambda^i {}_0I_x^{\alpha(i+1)} f(x)}_{=: S}, \quad (4.89)$$

wobei die erste Summe durch [Satz 3.8](#) absolut stetig ist. Wir betrachten wieder S und zeigen $S \in C^n([0, T])$. Nun ist $\alpha(i + 1) - n > 0$. Damit folgt

$$\|S\|_{C^n([0, T])} \leq \sum_{l=0}^n \sum_{i=m}^{\infty} |\lambda|^i \|{}_0I_x^{\alpha(i+1)-l} f\|_{C([0, T])} \quad (4.90a)$$

$$\leq (n + 1) \|f\|_{C([0, T])} \sum_{l=0}^n \sum_{i=m}^{\infty} \frac{|\lambda|^i T^{\alpha(i+1)-l}}{\Gamma(\alpha(i+1) - l + 1)} < \infty. \quad (4.90b)$$

Wieder folgt die Konvergenz der Reihe durch das Quotientenkriterium und [Lemma 4.1](#). Es folgt $y_{\text{part}} \in AC^n([0, T])$.

Nun überprüfen wir die Anfangsbedingungen. Dazu berechnen wir die Ableitungen. Es ist

$$\left(\frac{d^k}{dx^k} y_{\text{part}} \right)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i {}_0I_x^{\alpha(i+1)-k} f(x), \quad (4.91)$$

Aufgrund der Stetigkeit von f und $\alpha > k$ folgt ${}_0I_x^{\alpha(i+1)-k} f(0) = 0$. Damit können wir [Satz 3.13](#) benutzen und erhalten ${}_0^C D_x^\alpha y_{\text{part}}(x) = {}_0 D_x^\alpha y_{\text{part}}(x)$. Damit folgt nach [Gl. \(4.85a\)](#) und [Gl. \(4.85c\)](#)

$${}_0^C D_x^\alpha y_{\text{part}}(x) - \lambda y_{\text{part}}(x) = {}_0 D_x^\alpha y_{\text{part}}(x) - \lambda y_{\text{part}}(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [0, T], \quad (4.92)$$

da $f \in C([0, T])$. Wir haben damit gezeigt, dass y_{part} eine partikuläre Lösung von [Gl. \(4.87\)](#) ist. $\square$

Wir haben gesehen, dass für die Caputo Ableitungen stärkere Voraussetzungen an f gestellt werden müssen, als für die Riemann–Liouville Ableitung. Stetigkeit ist eine starke Voraussetzung und wir können uns die Frage stellen, ob wir diese abschwächen können? Wir haben gesehen, dass

$$\left(\frac{d^k}{dx^k} {}_0I_x^\alpha f \right)(0) = 0, \quad k = 0, \dots, n - 1 < \alpha \quad (4.93)$$

erfüllt sein muss. Diese Bedingung kann nur gebrochen werden, falls $0 < \alpha - k < 1$, daher betrachten wir die Bedingung

$${}_0I_x^\alpha f(0) = 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (4.94)$$

Weiter ist es sinnvoll zu fordern, dass ${}_0I_x^\alpha f$ in einer Umgebung der Null stetig ist. Dies wird erfüllt, falls ein $g \in L^1(0, T)$ existiert, sodass

$$f(x) = {}_0I_x^{1-\alpha} g(x), \quad \text{für fast alle } x \in [0, T] \quad (4.95)$$

gilt. Dann folgt mit [Satz 2.5](#) sofort

$${}_0I_x^\alpha {}_0I_x^{1-\alpha} g(x) = {}_0I_x^1 g(x) \rightarrow 0, \quad \text{für } (x \rightarrow 0). \quad (4.96)$$

Für $n > \alpha > n - 1$ lässt sich dies verallgemeinern zu der Existenz von $g \in L^1(0, T)$, sodass

$$f(x) = {}_0I_x^{n-\alpha} g(x), \quad \text{für fast alle } x \in [0, T] \quad (4.97)$$

was allgemeiner ist, als $f \in C([0, T])$ zu fordern.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir die Riemann–Liouville- und Caputo fraktionale Ableitungen, sowie einfache fraktionale Differentialgleichungen untersucht. Dabei haben wir zuerst eine Formel bewiesen um mehrere Integrale zu einem einzigen zusammenzufassen. Diese Formel konnte durch die Gammafunktion für die positiven reellen Zahlen fortgesetzt werden, wodurch ein fraktionales Integral definiert wurde. Dieses Integral hat mehrere Eigenschaften, welche für die darauffolgenden Beweise benutzt wurden. Zum einen ist es ein beschränkter Operator von dem Raum $L^1(a, b)$ auf sich selbst, es erfüllt eine Semi-Gruppen Eigenschaft, dass heißt das die Ordnung von verketteten Integralen addiert werden kann und wir haben gezeigt, dass dieses Integral eine glättende Wirkung hat, so werden stetige Funktionen absolut stetig. Die fraktionale Ableitungen konnten als Ableitungen dieses Integrals definiert werden, dabei wurde gezeigt, dass es einen Unterschied macht, ob vor oder nach dem Ableiten integriert wird. Die entstehenden Ableitungen werden Riemann–Liouville fraktionale Ableitung und Caputo fraktionale Ableitung genannt. Aufgrund der Reihenfolge von Integration und Ableitung sind die Definitionsbereiche der Ableitungen unterschiedlich. Während wir für die Caputo Ableitung absolut stetige Funktionen benötigen, sind stetige Funktionen für die Riemann–Liouville Ableitung ausreichend. Für absolut stetige Funktionen konnte ein Zusammenhang zwischen den beiden Ableitungen bewiesen werden. Weiter wurde die Laplace-Transformation für beide Ableitungen berechnet und damit konnten Anfangsbedingungen, welche für Eindeutige Lösungen von fraktionalen Differentialgleichungen notwendig sind definiert werden.

Die Laplace-Transformation zeigte sich als gute Methode um lineare fraktionale Differentialgleichungen zu lösen. Die Methodik wurde an verschiedenen Differentialgleichungen gezeigt. Ein besonderer Fokus lag auf der Differentialgleichung $D^\alpha y = \lambda y$, wobei die Lösungen eine Art fraktionale Exponentialfunktion, die sogenannte Mittag-Leffler-Funktion enthielten. Die Anfangsbedingungen für Riemann–Liouville Differentialgleichungen führten zu Lösungen mit Polstellen im Punkt $x = 0$. Dies war für die Caputo Ableitung anders, da die Forderung absolut stetiger Funktionen Stetigkeit für $x = 0$ implizierten. Zum Schluss wurde die partikuläre Lösung von $D^\alpha y - \lambda y = f$ hergeleitet.

Danksagung

Zunächst möchte mich bei Herrn Prof. Dr. Mugnolo bedanken, dass ich dieses tolle Thema bearbeiten durfte.

Des Weiteren möchte ich mich sowohl bei Herrn Prof. Dr. Mugnolo als auch bei Frau Dr. Spilioti für das regelmäßige Feedback und beantworten meiner Fragen bedanken.

Literatur

- [1] Wolfgang Arendt u. a. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems: Second Edition*. Basel: Springer Basel, 2011.
- [2] K. Balachandran. *An Introduction to Fractional Differential Equations*. Springer, 2023.
- [3] Peter Eichelsbacher. *Einführung in die Stochastik, Skript zum Modul 61311*. FernUniversität in Hagen, 2023.
- [4] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, 2018.
- [5] Ascione Giacomo, Mishura Yuliya und Pirozzi Enrica. *Fractional Deterministic and Stochastic Calculus*. De Gruyter, 2020.
- [6] M. A. Al-Gwaiz. *Sturm-Liouville Theory and its Applications*. Springer, 2026.
- [7] Nick Laskin. „Fractional Schrödinger equation“. In: *Phys. Rev. E* 66 (5 Nov. 2002), S. 056108. DOI: [10.1103/PhysRevE.66.056108](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056108). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.66.056108>.
- [8] Gottfried Wilhelm Leibniz. *Sämtliche Schriften und Briefe*. Bd. 6. Hrsg. von Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften und Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Komp. von Heinz-Jürgen Heß und James G. O'Hara. Dritte Reihe: Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel. Berlin: Akademie Verlag, 2004, S. 503–510.
- [9] Somayeh Mashayekhi u. a. „Fractional viscoelasticity in fractal and non-fractal media: Theory, experimental validation, and uncertainty analysis“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 111 (2018), S. 134–156. ISSN: 0022-5096. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.10.013>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509617304428>.
- [10] Delio Mugnolo, Joachim Kerner und Hafida Laasri. *Funktionalanalysis, Skript zum Modul 61213*. FernUniversität in Hagen, 2025.
- [11] Rafael de Oliveira und J. A. Tenreiro Machado. „A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral“. In: *Mathematical Problems in Engineering* 2014 (2014), S. 1–10. DOI: [10.1155/2014/238459](https://doi.org/10.1155/2014/238459).
- [12] Manuel D. Ortigueira. „A New Look at the Initial Condition Problem“. In: *Mathematics* 10.10 (2022), S. 1771. DOI: [10.3390/math10101771](https://doi.org/10.3390/math10101771).

- [13] Igor Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.
- [14] Stefan G. Samko, Anatoly A. Kilbas und Oleg I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications*. Gordon und Breach Science Publishers, 1993.