

Bewertung Amerikanischer Optionen mit stochastischer Volatilität: Multigridverfahren basierend auf Tensorprodukt-B-Splines höherer Ordnung

Sandra Boschert `boschert@math.uni-koeln.de`*

29. Januar 2016

Abstract

Die Bewertung Amerikanischer Optionen mit stochastischer Volatilität führt auf ein freies Randwertproblem mit einer elliptischen partiellen Differentialgleichung. Die sogenannte Heston-Gleichung hängt neben der Zeit, im Ort von dem Aktienkurs und der Volatilität ab und beinhaltet einen Diffusions-, Reaktions- und Konvektionsterm. Zunächst werden Vorbereitungen zur numerischen Lösung des freien Randwertproblems getroffen und ein komplementäres Problem hergeleitet, in dem der unbekannte freie Rand nicht mehr explizit auftaucht. Die Diskretisierung des komplementären Problems erfolgt mittels einer sogenannten Semidiskretisierung. Dazu wird das Problem hinsichtlich der Zeit mittels des Finiten-Differenzen-Verfahrens diskretisiert und hinsichtlich des Ortes wird eine Variationsungleichung mit kubischen Tensorprodukt-B-Splines auf einem Rechtecksbereich approximiert. Die Wahl der Basis als kubische B-Splines ist dadurch motiviert, dass neben dem Optionspreis insbesondere deren partielle Ableitungen nach den Modellparametern, die sogenannten Griechen, auf dem Kapitalmarkt eine wesentliche Rolle spielen und somit eine punktgenaue Approximation der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 möglich ist. Letztendlich ergibt sich ein lineares komplementäres Problem mit einer asymmetrischen hochdimensionalen Tensorproduktmatrix, das in jedem Zeitschritt gelöst werden muss. Zur schnellen Lösung des linearen komplementären Problem wird das monotone Mehrgitterverfahren angewendet und die schnelle Konvergenzgeschwindigkeit gegenüber klassischen Iterationsverfahren anhand numerischer Tests untersucht.

*boschert@math.uni-koeln.de