Frameschranken für Gabor Frames total positiver Funktionen

Marina Bangert[1], Joachim Stöckler[2]

[1] TU Dortmund
marina.bangert@tu-dortmund.de
[2] TU Dortmund

Abstract

In der Zeit-Frequenz-Analyse ist die Gabor Transformation eine effiziente Methode, um das Verhalten eines gegebenen Signals in Zeit und Frequenz zu analysieren. Eine wichtige Aufgabe der Gabor Analysis ist das Finden von Fensterfunktionen und Zeit-Frequenz-Gittern $\alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$, für welche das Gabor System

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) = \{e^{2i\pi l\beta \cdot} g(\cdot - k\alpha) \,|\, k, l \in \mathbb{Z}\}, \qquad g \in L^2(\mathbb{R})$$

einen Frame bildet. Bis vor ein paar Jahren waren die Framemengen

$$\mathcal{F} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \,|\, \mathcal{G}(g, \alpha, \beta) \text{ ist ein Frame}\}$$

nur weniger Funktionen bekannt.
2012 fanden Gröchenig und Stöckler mit den total positiven Funktionen endlicher Ordnung eine neue Klasse von Fensterfunktionen und zeigten, dass jede total positive Fensterfunktion für alle Gitterparameter mit $\alpha\beta < 1$ einen Frame erzeugen.
Abschätzungen der unteren Frameschranken in Abhängigkeit der Gitter sind zur Beschreibung der numerischen Stabilität wichtig. Das asymptotische Verhalten der Frameschranken im Fall $\alpha = 1$ und $\beta \nearrow 1$ soll anhand von B-Splines B_m untersucht werden. Hierfür benötigt man eine Charakterisierung der Gabor Frames über die Pre-Gramian Matrix $P(B_m(x + k - l/\beta))_{k,l\in\mathbb{Z}}$.