

# 31. Rhein-Ruhr-Workshop

Bestwig, 11.-12. Februar 2022

-Programm, Teilnehmer und Abstracts-



## Organisation:

Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

Prof. Dr. T. Sauer

Prof. Dr. M. Skrzipek

Universität Göttingen

Universität Passau

FernUniversität in Hagen

**31. Rhein-Ruhr-Workshop**  
**Bestwig, 11.Februar–12. Februar 2022**  
**PROGRAMM**

**Freitag, 11. Februar 2022, Vormittag**

10.50	<i>Begrüßung / Organisatorisches</i>
	<i>Sektionsleitung: T. Sauer</i>
11.00	<b>F. Filbir</b> (Helmholtz-Zentrum München) Shift Invariant Spaces Related to the Special Affine Fourier Transform
11.30	<b>F. Taubert</b> (Technische Universität Chemnitz) Die Uniform Sparse FFT am Beispiel von PDEs mit zufälligen Koeffizienten
12.00	<i>Gemeinsames Mittagessen</i>

**Freitag, 11. Februar 2022, Nachmittag**

	<i>Sektionsleitung: F. Filbir</i>
14.00	<b>R. Razavi</b> (Universität Göttingen) Image Denoising in Optical Coherence Tomography
14.30	<b>M. Weimar</b> (Ruhruniversität Bochum) Rate-optimal sparse approximation of compact break-of-scale embeddings
15.00	<i>Pause mit Kaffee, Tee, Kuchen</i>
	<i>Sektionsleitung: G. Plonka-Hoch</i>
15.45	<b>M. Juhos</b> (Universität Passau) Spectral flatness and the volume of intersections of $p$ -ellipsoids
16.15	<b>P. Römer</b> (Helmholtz-Zentrum München) On the Randomized Kaczmarz Algorithm for Phase Retrieval
16.45	<i>Pause</i>
	<i>Sektionsleitung: U. Reif</i>
17.00	<b>H. Veselovska</b> (Technische Universität München) Sigma-Delta Modulation und Druckraster
17.30	<b>T. Sauer</b> (Universität Passau) Continued Fractions and Pronys Method
18.00	<i>Gemeinsames Abendessen</i>

19.00	<b>Präsentation der Poster</b>	
	<b>K. Bourarba</b> (Technische Universität Darmstadt) Blended Spline Graphs: A New Paradigm for Curve and Surface Modeling	<b>T. Lang</b> (Universität Passau) <u>Poster 1:</u> Feature Adaptive Interactive Thresholding <u>Poster 2:</u> AI-supported Interactive Segmentation of 3D Volumes
	<b>M. Stock</b> (Universität Passau) <u>Poster 1:</u> LiveTV: Realtime Total Variation Regularization Using Haar Wavelets <u>Poster 2:</u> Sparse Volume Reconstruction Based on Haar Wavelet Techniques	

**Samstag, 12. Februar 2022**

8.00	<i>Frühstück</i>
	<i>Sektionsleitung: M. Weimar</i>
9.00	<b>A. Dietz</b> (Technische Universität Darmstadt) Subdivision and Simulation
9.30	<b>G. Plonka-Hoch</b> (Universität Göttingen) From ESPRIT to ESPIRA: Estimation of Signal Parameters by Iterative Rational Approximation
10.00	<i>Pause mit Kaffee, Tee</i>
	<i>Sektionsleitung: M. Skrzipek</i>
10.30	<b>M. Hockmann</b> (Universität Osnabrück) Lipschitz continuity of sparse super resolution and its trigonometric approximation
11.00	<b>Y. Kolomoitsev</b> (Universität Göttingen) Sharp $L_p$ -error estimates for sampling operators
11.45	<i>Gemeinsames Mittagessen</i>

**Dauer der Vorträge:** 30 Minuten, einschließlich Diskussionszeit.

## TEILNEHMERLISTE RRW 2022

BOUARABA,Kai	Technische Universität Darmstadt	bouaraba@mathematik.tu-darmstadt.de
COTTIN, Claudia	Fachhochschule Bielefeld	claudia.cottin@fh-bielefeld.de
COTTIN, Ludwig		
DIETZ, Alexander		dietz@mathematik.tu-darmstadt.de
FILBIR, Frank		frank.filbir@web.de
HOCKMANN, Mathias		mathias.hockmann@uni-osnabrueck.de
JUHOS, Michael		michael.juhos@uni-passau.de
KOLOMOITSEV, Yurii		kolomoitsev@math.uni-goettingen.de
LANG, Thomas		langthom@forwiss.uni-passau.de
PLONKA-HOCH, Gerlind		plonka@math.uni-goettingen.de
RAZAVI, Raha		r.razavi@math.uni-goettingen.de
REIF, Ulrich		reif@mathematik.tu-darmstadt.de
RÖMER, Patricia		patricia.roemer@helmholtz-muenchen.de
SAUER, Tomas		tomas.sauer@uni-passau.de
SCHLENKER, Florian		schlenke@forwiss.uni-passau.de
SKRZIPEK, Michael		michael.skrzipek@fernuni-hagen.de
STOCK, Andreas Michael		stock@forwiss.uni-passau.de
TAUBERT, Fabian		fabian.taubert@mathematik.tu-chemnitz.de
VESELOVSKA, Hanna		hanna.veselovska@tum.de
WEIMAR, Markus		markus.weimar@rub.de

# Blended Spline Graphs: A new Paradigm for Curve and Surface Modeling

Kai Bouaraba

TU Darmstadt

bouaraba@mathematik.tu-darmstadt.de

Für die Simulation von Mehrphasenströmungen ist ein geometrisches Modell der Oberfläche von Flüssigkeiten notwendig. Dieses muss sowohl Zugriff auf Volumina und Krümmungen bieten als auch mit Topologie-Wechseln umgehen können. Die Blended Spline Graphs (BSG) Methode ist ein völlig neuer Ansatz für ein solches Modell.

In der BSG Methode werden zunächst statische Objekte lokal durch Spline-Graphen dargestellt, welche in Überlappungsbereichen zusammengeblendet werden. Die Definitionsbereiche und Werte dieser Funktionsgraphen verändern sich dann gemäß der betrachteten Differentialgleichung. Eine hierarchische Basis ermöglicht den Umgang mit starken Krümmungen.

# Subdivision and Simulation

Alexander Dietz

TU Darmstadt

dietz@mathematik.tu-darmstadt.de

In diesem Vortrag diskutieren wir die numerische Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen auf Subdivisionsflächen und -volumina. Dazu gehen wir zunächst auf den theoretischen Hintergrund ein und stellen anschließend erste Ergebnisse anhand einiger Beispiele vor. Konkret betrachten wir Subdivisionsflächen und -volumina, die durch den Catmull-Clark Algorithmus erzeugt werden, und lösen die Poissons-Gleichung auf diesen mit der Finite-Elemente-Methode.

In this talk we discuss the numerical solution of elliptic PDEs on subdivision surfaces and volumes. First, we explain the theoretical background and then show first results for a few examples. In detail, we consider subdivision surfaces and volumes generated by the Catmull-Clark algorithm and the solution of Poisson's equation on them by the Finite Element Method.

# Shift Invariant Spaces related to the Special Affine Fourier Transform

Frank Filbir

## Abstract:

We introduce a generalized translation  $T_x^A$  associated with the special affine Fourier transform (SAFT)  $\mathcal{F}_A$  and establish a generalized convolution theorem. This is being used to obtain a generalization of Wendel's theorem for SAFT multipliers. The shift invariant space  $V_A(\phi)$  associated with the SAFT is introduced and characterization theorems for the system of translates  $T_x^A$  to be an orthonormal system and a Riesz sequence are obtained. In the final part of the paper sampling in the shift invariant spaces  $V_A$  is discussed along with illustrations.

The talk is based on joint work with Radha Ramakrishnan and Hasan Ali Biswas, Indian Institute of Technology, Chennai, India.

# Lipschitz continuity of sparse super resolution and its trigonometric approximation

MATHIAS HOCKMANN

*Osnabrück University*

Motivated by the application of neural networks in super resolution microscopy, this talk considers super resolution as the mapping of trigonometric moments of a discrete measure on  $[0, 1]^d$  to its support and weights. We prove that this map satisfies a local Lipschitz property where we give explicit estimates for the Lipschitz constant depending on the dimension  $d$  and the sampling effort. Moreover, this local Lipschitz estimate allows to conclude that super resolution with the Wasserstein distance as the metric on the parameter space is even globally Lipschitz continuous. Based on this, we consider simple and efficiently computable trigonometric approximations of the mapping and see that they inherit the Lipschitz property.

# Spectral flatness and the volume of intersections of $p$ -ellipsoids

Michael Juhos  
Universität Passau

Rhein-Ruhr-Workshop 2022

Motivated by classical works of Schechtman and Schmuckenschläger on intersections of  $\ell_p$ -balls and recent ones in information-based complexity relating random sections of ellipsoids and the quality of random information in approximation problems, we study the threshold behavior of the asymptotic volume of intersections of generalized  $p$ -ellipsoids. The non-critical behavior is determined under a spectral flatness (Wiener entropy) condition on the semi-axes. In order to understand the critical case at the threshold, we prove a central limit theorem for  $q$ -norms of points sampled uniformly at random from a  $p$ -ellipsoid, which is obtained under Noether's condition on the semi-axes.

This talk is based on joint work with my supervisor, Joscha Prochno.

# **Sharp $L_p$ -error estimates for sampling operators**

YURII KOLOMOITSEV

*University of Göttingen*

We study approximation properties of linear sampling operators in the spaces  $L_p$ . By means of the Steklov averages, we introduce a new measure of smoothness containing simultaneously information on the smoothness of a function in  $L_p$  and discrete information on this function at sampling points. The new measure of smoothness enables us to improve and extend several classical results of approximation theory to the case of linear sampling operators. In particular, we obtain matching direct and inverse approximation inequalities for sampling operators in  $L_p$ , find the exact order of decreasing of the corresponding  $L_p$ -errors for particular classes of functions, and introduce a special  $K$ -functional and its realization suitable for studying smoothness properties of sampling operators. In this talk, we will present some of these results in the case of approximation of functions by trigonometric Lagrange interpolation polynomials.

# Feature-Adaptive Interactive Thresholding

Thomas Lang

11. Februar 2021

Die Segmentierung, d.h. die Extraktion von Teilkomponenten aus Bildern ist seit der Erfindung von bildgebenden Verfahren ein zentraler Punkt in vielen Anwendungsgebieten, von medizinischen Einsatzgebieten hin zur zerstörungsfreien Inspektion von Bauteilen. Dabei ist speziell die Segmentierung von dreidimensionalen Datensätzen ein wichtiges Problem in der industriellen Computertomographie. Unter den zahlreichen bereits entwickelten Methoden finden sich viele Schwellwertverfahren (en. *thresholding methods*). Diese basieren darauf, dass dem Segmentierungssystem ein solcher Schwellwert  $\theta \in \mathbb{R}$  übergeben wird, welcher das betrachtete 3D-Volumen binarisieren soll. Die Ausgabe ist also ein Voxeldatensatz der selben Größe wie die Eingabe, dessen Voxelwerte sich über

$$\tilde{x}_{\alpha} = \begin{cases} 1, & x_{\alpha} \geq \theta, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definieren, wobei  $x_{\alpha}$  der Grauwert des aktuell betrachteten Voxels und  $\tilde{x}_{\alpha}$  der Wert des Voxels im Ausgabevolumen ist, jeweils an einer dreidimensionalen Position  $\alpha \in \mathbb{N}^3$ . Obwohl sich dieses Verfahren leicht auf beliebig große Datensätze anwenden lässt, reicht ein einziger globaler Schwellwert oft nicht aus, da Messrauschen und Artefakte die Voxelwerte beeinflussen. Eine Konsequenz daraus ist, dass die Segmentierungsergebnisse unvollständig sind, da sie Objekte und Strukturen enthalten, die sich nicht mit einem Schwellwert korrigieren lassen. Die gängige Herangehensweise in der Literatur ist die Benutzung mehrerer Schwellwerte, was dieses Problem aber nur bedingt löst.

Aus diesem Grund wurde hiermit ein neues interaktives Schwellwertverfahren entwickelt, welches einen globalen Schwellwert aber auch lokale Strukturen berücksichtigt. Genauer wird für jede lokale Voxelumgebung dieser Schwellwert *lokal* verändert, abhängig von den detektierten Strukturen. Somit können kritische Regionen interaktiv markiert und aus lokalen Umgebungen darin Features extrahiert werden. Diese definieren durch Lösung eines in dieser Posterpräsentation vorgestellten Optimierungsproblems eine optimale lokale Veränderung. Diese verändert dann den Schwellwert in Präsenz der selben Strukturen lokal so, dass die Strukturen in kritischen Regionen erfasst werden, aber eine Übersegmentierung andernorts vermieden wird.

# AI-Supported Segmentation of Industrial CT Data

Thomas Lang

11. Februar 2022

Die Segmentierung, d.h. die Extraktion von Teilkomponenten aus Bildern ist seit der Erfindung von bildgebenden Verfahren ein zentraler Punkt in vielen Anwendungsgebieten, von medizinischen Einsatzgebieten hin zur zerstörungsfreien Inspektion von Bauteilen. Dabei ist speziell die Segmentierung von dreidimensionalen Datensätzen ein wichtiges Problem in der industriellen Computertomographie. In den vergangenen Jahrzehnten wurden zahlreiche Methoden entwickelt um dieses Ziel zu erreichen. Während etablierte Methoden aus der medizinischen Bildverarbeitung prinzipiell auch auf die industrielle Domäne angewendet werden können, steht man in letzterer Situation vor neuen Herausforderungen: Die Datensätze sind typischerweise deutlich hochaufgelöster als in der Medizin und die Vielfältigkeit der interessanten Komponenten ist ebenfalls bei weitem höher. Daher sind flexible Methoden für dreidimensionale Segmentierung die mit großen Volumina umgehen können gefragt. Jedoch ist die Menge solcher Verfahren noch relativ klein und verlassen sich zunehmend auf Methoden des maschinellen Lernens. Letztere benötigen aber typischerweise annotierte Trainingsdaten, d.h. Masken-Volumen in welchen pro Voxel von einem Experten die Entscheidung festgehalten wurde, ob dieses Voxel zur gewünschten Komponente gehört. Die Erstellung solcher Volumina ist äußerst aufwändig und auch kostenintensiv. Darüberhinaus kommen in der industriellen Tomographie auch oft *einzigartige* Objekte vor, zu einem Scan gibt es also keine vergleichbaren Objekte aus denen Informationen gelernt werden können.

Aus diesem Grund wurde hiermit eine neue interaktive Segmentierungsmethodik entworfen. Diese verbindet mathematische Modellierung, *Active Learning*, robuste Klassifikatoren und *lokale* Datenverarbeitung um zu erlauben, dass interaktiv spezifiziert wird was segmentiert werden soll. Diese Interaktivität bildet somit die Brücke zwischen Benutzerinteraktion und aktivem Labeling von Voxeln für die Trainingsdatengewinnung. Damit wird die Verarbeitung von einzigartigen Volumen möglich, da benötigte annotierte Datenpunkte in Form von einzelnen markierten Voxeln durch den Benutzer eingebracht werden. Somit kann ein Algorithmus auf eine Vielzahl an Segmentierungsproblemstellungen angewendet werden, ohne jeweils ein Verfahren pro gesuchter Komponente zu entwerfen. Dieses Verfahren ist ferner auf generellen 3D-Voxelvolumen anwendbar, unabhängig von der konkreten Domäne der Computertomographie. Diese Posterpräsentation beleuchtet diese Herangehensweise im Detail und zeigt, dass eine hohe Flexibilität erreicht und dennoch exzellente Resultate auch für große 3D-Volumen erzielt werden können.

# From ESPRIT to ESPIRA: Estimation of Signal Parameters by Iterative Rational Approximation

Gerlind Plonka

(Institute for Numerical and Applied Mathematics, University of Göttingen, Germany  
*plonka@math.uni-goettingen.de*)

We consider exponential sums of the form

$$f(t) = \sum_{j=1}^M \gamma_j e^{\phi_j t} = \sum_{j=1}^M \gamma_j z_j^t,$$

where  $M \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , and  $z_j = e^{\phi_j} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  with  $\phi_j \in \mathbb{C}$  are pairwise distinct. The recovery of such exponential sums from a finite set of possibly corrupted signal samples plays an important role in many signal processing applications, see e.g. in phase retrieval, signal approximation, sparse deconvolution in nondestructive testing, model reduction in system theory, direction of arrival estimation, exponential data fitting, or reconstruction of signals with finite rate of innovation.

Often, the exponential sums occur as Fourier transforms or higher order moments of discrete measures (or streams of Diracs) of the form  $\sum_{j=1}^M \gamma_j \delta(\cdot - T_j)$  with  $T_j \in \mathbb{R}$ , which leads to the special case that  $\phi_j = iT_j$  is purely complex, i.e.,  $|z_j| = 1$ .

We introduce a new method for **E**stimation of **S**ignal **P**arameters based on **I**terative **R**ational **A**pproximation (ESPIRA) for sparse exponential sums. Our algorithm uses the AAA algorithm for rational approximation of the discrete Fourier transform of the given equidistant signal values. We show that ESPIRA can be interpreted as a matrix pencil method applied to Loewner matrices. These Loewner matrices are closely connected with the Hankel matrices which are usually employed for recovery of sparse exponential sums. Due to the construction of the Loewner matrices via an adaptive selection of index sets, the matrix pencil method is stabilized. ESPIRA achieves similar recovery results for exact data as ESPRIT and the matrix pencil method (MPM) but with less computational effort. Moreover, ESPIRA strongly outperforms ESPRIT and MPM for noisy data and for signal approximation by short exponential sums.

This talk is based on joint results with N. Derevianko and M. Petz (University of Göttingen).

## Talk at the Rhein-Ruhr-Workshop

**Presenter:** Raha Razavi

**Supervisor:** Gerlind Plonka-Hoch

**University:** The Georg August University of Göttingen

**Title:** Image Denoising in Optical Coherence Tomography

**Abstract:** “Optical Coherence Tomography (OCT) images, as well as a majority of medical images, are imposed to speckle noise while capturing and using the reconstructing algorithms. We first present the results of a specific group of denoising methods known as non-data-adaptive transforms for OCT images. Thereafter, the improved results obtained from a denoising algorithm using adaptive thresholding values and adaptive window size selections based on a Morphological Component Analysis scheme will be discussed.”

# On the randomized Kaczmarz algorithm for phase retrieval

Patricia Römer

*(Helmholtz Center Munich,  
Technical University of Munich)*

We consider the problem of phase retrieval, i.e., the problem of recovering an object from a system of quadratic equations. As a method for solving such a phase retrieval problem, we investigate a variant of the randomized Kaczmarz algorithm. The main contribution of our work is a recovery guarantee for phase retrieval from measurements perturbed with additive noise via the randomized Kaczmarz algorithm. We consider the scenario that the measurement vectors are drawn independently and uniformly at random from the unit sphere and that the number of measurements is a sufficiently large multiple of the dimension. We show that, with high probability, the randomized Kaczmarz algorithm converges to a neighborhood around the ground-truth solution whose radius depends on the level of the noise.

This talk is based on joint work with Frank Filbir (Helmholtz Center Munich) and Felix Krahmer (Technical University of Munich).

# Continued Fractions and Pronys Method

T. SAUER

*Universität Passau*

Kettenbrüche sind ein mehr als klassischer Ansatz in der Zahlentheorie, aber auch beim Studium von (orthogonalen) Polynomen. Da man das Prony-Problem auch als Momentenproblem interpretieren kann, ist es naheliegend, dass es hier Beziehungen geben muss, von denen ein paar kurz vorgestellt werden.

# LiveTV – Realtime Total Variation Regularization Using Haar Wavelets

*A. Michael Stock\* (University of Passau), Tomas Sauer*

Haar tensor wavelet analysis enables sparse representation of locally constant data. This can be exploited when compressing very large computed tomography (CT) scans: Even when keeping just a small percentage of the original wavelet coefficients, high image quality is preserved.

Now, for 3D data, we consider only coefficients created by applying one wavelet and two scaling functions. Properly weighted, this provides us with local gradient estimates. Moreover, thresholding these particular coefficients can at the same time approximately reduce the total variation (TV) norm.

`stock@forwiss.uni-passau.de`

# Sparse Volume Reconstruction Based on Haar Wavelet Techniques

*A. Michael Stock\* (University of Passau), Tomas Sauer*

The goal is to reconstruct 3D computed tomography (CT) volumes that are locally constant. By doing this in the Haar wavelet basis, we can save memory because the thresholding/compression step is integrated into the reconstruction. We consider classical iterative methods like the Algebraic Reconstruction Technique (ART), its randomized version, the Iterative Shrinking-Thresholding Algorithm (ISTA) and its modification Fast ISTA (FISTA).

The idea is a multilevel reconstruction where only the relevant coefficients are kept before advancing to the next resolution level. This enables local refinement and leads to a monotone sequence of finer grids where the data is reconstructed. The reconstruction steps itself consist of applying standard methods (ART, ISTA...) onto the data on the current grid. Iterating through the resolution levels, the grid approaches the maximal resolution while being as sparse as possible. First results on synthetic data look promising.

`stock@forwiss.uni-passau.de`

## Die uniform sparse FFT am Beispiel von PDEs mit zufälligen Koeffizienten

Viele moderne Problemstellungen führen zu partiellen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Unsicherheiten unterliegen, welche durch zufällige Parameter modelliert werden. Daher hat auch das numerische Lösen solcher Gleichungen für die Quantifizierung von Unsicherheit in den vergangenen Jahren zunehmende Aufmerksamkeit erhalten, insbesondere mit Fokus auf Effizienz, Zuverlässigkeit und Stabilität der Algorithmen. Ein übliches Beispiel ist das folgende parametrische, elliptische Problem, welches die Diffusion eines inhomogenen Materials beschreibt:

Seien die Gebiete  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ , typischerweise mit  $d = 1, 2$  oder  $3$ , und  $D_y \subseteq \mathbb{R}^{d_y}$  sowie  $a : D \times D_y \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann finde  $u : D \times D_y \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für alle  $y \in D_y$  die Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (a(x, y) \nabla u(x, y)) = f(x) \quad x \in D, y \in D_y$$

mit der Randbedingung

$$u(x, y) = 0 \quad x \in \partial D, y \in D_y$$

gilt. Der Differentialoperator  $\nabla$  bezieht sich hierbei nur auf die Ortsvariable  $x$ . Die Komponenten des Vektors  $y$  sind jeweils eindimensionale, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit einer gegebenen Verteilung und die Dimension  $d_y$  des Vektors  $y$  ist typischerweise sehr groß.

Wir präsentieren hier einen effizienten Algorithmus zur Lösung solcher Differentialgleichungen, die sogenannte *uniform sparse FFT* oder kurz *usFFT*. Ziel ist die Approximation der Lösung  $u$  auf einer Diskretisierung  $\{\mathbf{x}_g \in D, g = 1, \dots, G\}, G < \infty$ , des Ortsbereiches, welche beispielsweise ein Finite-Elemente-Gitter sein kann. Für jeden Diskretisierungspunkt  $\mathbf{x}_g$  ergibt sich eine Approximation

$$u_{\mathbf{x}_g}(\cdot) := u(\mathbf{x}_g, \cdot) \approx \sum_{\mathbf{k} \in I} c_{\mathbf{k}}^{\text{usFFT}}(u_{\mathbf{x}_g}) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot}.$$

Der verwendete dimensions-inkrementelle Ansatz bestimmt hierbei adaptiv eine gute Frequenzmenge  $I$  sowie die dazugehörigen approximierten Fourier-Koeffizienten  $c_{\mathbf{k}}^{\text{usFFT}}(u_{\mathbf{x}_g}), \mathbf{k} \in I$ , simultan für alle Punkte  $\mathbf{x}_g, g = 1, \dots, G$ . Insbesondere benötigt die usFFT bis auf eine Kandidatenmenge  $\Gamma \supset I$  keine besonderen Annahmen oder Eingabewerte. Ferner ist die gefundene Frequenzmenge  $I$  unabhängig von  $g$  und stellt damit uniform für alle  $\mathbf{x}_g, g = 1, \dots, G$ , eine gute Approximationsbasis. Der Algorithmus benötigt lediglich Auswertungen der Lösungen  $u$  an verschiedenen Punkten  $y$ , welche mittels eines herkömmlichen PDE-Lösers berechnet werden können. Durch Austauschen dieses Lösers kann die usFFT daher leicht an veränderte Differentialgleichungen mit zufälligen Koeffizienten angepasst werden.

Wir testen den Algorithmus an Beispielen mit unterschiedlichen Diffusionskoeffizienten  $a(x, y)$  und gleichverteilten oder standardnormalverteilten Zufallsvariablen  $y$ . Die Resultate wurden anschließend in simplen Fehlernormen auf Genauigkeit geprüft. Die ausgegebene Frequenzmenge  $I$  sowie die approximierten Fourier-Koeffizienten  $c_{\mathbf{k}}^{\text{usFFT}}(u_{\mathbf{x}_g}), \mathbf{k} \in I$ , ermöglichen insbesondere einen detaillierten Einblick in den Einfluss der einzelnen Komponenten von  $y$  auf die Lösung  $u$  sowie deren Kopplungen untereinander.

# Sigma-Delta Modulation und Druckraster

Hanna Veselovska

Technical University of Munich  
hanna.veselovska@tum.de

In our work, we study error diffusion techniques for digital halftoning from the perspective of 1-bit quantization. We introduce a method to generate schemes for two-dimensional signals as a weighted combination of its one-dimensional counterparts and show that various error diffusion schemes proposed in the literature can be represented in this framework via schemes of first order. Under the model of two-dimensional bandlimited signals, which is motivated by a mathematical model of human visual perception, we derive quantitative error bounds for such weighted schemes. We see these bounds as a step towards a mathematical understanding of the good empirical performance of error diffusion, even though they are formulated in the supremum norm, which is known to not fully capture visual similarity of images.

Motivated by the correspondence between existing error diffusion algorithms and first-order schemes, we study the performance of the analogous weighted combinations of second-order schemes and show that they exhibit a superior performance in terms of guaranteed error decay for two-dimensional bandlimited signals. In extensive numerical simulations for real world images, we demonstrate that with some modifications to enhance stability this superior performance also translates to the problem of digital halftoning. More concretely, we find that certain second-order weighted schemes exhibit competitive performance for digital halftoning of real world images in terms of the *Feature Similarity Index* (FSIM), a state-of-the-art measure for image quality assessment.

This is joint work with Prof. Felix Krahmer from the Technical University of Munich.

## Rate-optimal sparse approximation of compact break-of-scale embeddings

Markus Weimar  
Ruhr-Universität Bochum (RUB)  
markus.weimar@rub.de  
[www.rub.de/ffm/Lehrstuehle/Weimar](http://www.rub.de/ffm/Lehrstuehle/Weimar)

Die klassische Approximationstheorie lehrt uns, dass die zu erwartende Konvergenzgeschwindigkeit numerischer Verfahren eng verwandt ist, mit der Regularität der zu approximierenden Objekte. Im Falle von Funktionen kann diese Regularität bspw. mithilfe der Zugehörigkeit zu Vertretern der Skala der klassischen (isotropen)  $L_p$ -Sobolev-Räume charakterisiert werden. Alternative, praktisch relevante Ansätze legen den Fokus eher auf anisotrope Formen der Regularität wie der sog. *dominiert-gemischten Glattheit*, welche unter anderem in der Theorie der sparse grids ausgenutzt wird. Obwohl die Approximationstheorie für Einbettungen innerhalb beider Skalen gut entwickelt scheint, gibt es bisher nur wenige Resultate zu sog. *break-of-scale embeddings*. Im Vortrag definieren wir neue Funktionenräume mit hybrider Regularität, welche beide genannten Skalen als Spezialfälle enthalten. Wir stellen exemplarisch Einbettungen vor und konstruieren (nicht-)lineare Algorithmen basierend auf hyperbolischen Wavelets, die diese nachweislich mit (asymptotisch) optimaler Rate approximieren.

Der Vortrag bespricht damit einfach zugängliche Spezialfälle einer allgemeinen Theorie [1], die gegenwärtig in Kooperation mit Janina Hübner (RUB) und Glenn Byrenheid (FSU Jena) entwickelt wird.

### REFERENCES

- [1] G. Byrenheid, J. Hübner, and M. Weimar. *Rate-optimal sparse approximation of compact break-of-scale embeddings*. In preparation, 2022+.