Diffusive Darstellungen für fraktionale Integraloperatoren und ihre Anwendungen

Kai Diethelm

Fakultät Angewandte Natur- und Geisteswissenschaften
Technische Hochschule Würzburg-Schweinfurt

Differential- und Integraloperatoren fraktionaler Ordnung haben sich in den letzten Jahren als leistungsfähiges Werkzeug für die mathematische Modellierung gedächtnisbehafteter Prozesse etabliert. Gerade die Tatsache, dass Gedächtniseffekte modelliert werden können, stellt die Numerik jedoch vor besondere Herausforderungen, denn diese Eigenschaft führt dazu, dass traditionelle Algorithmen im Hinblick auf Laufzeit ebenso wie auf Speicherbedarf eine deutlich höhere Komplexität aufweisen als entsprechende Algorithmen für nicht-fraktionale (gedächtnisfreie) Modelle. Mit den sog. *diffusiven Darstellungen* besteht eine Möglichkeit, die fraktionalen Operatoren in einer Form auszudrücken, die das Gedächtnis nicht mehr explizit beinhaltet, sondern implizit. Dies führt dazu, dass Algorithmen konstruiert werden können, die sowohl bezüglich der Rechenzeit als auch bezüglich des Speicherbedarfs signifikant günstiger sind als konventionelle Ansätze.

Der wesentliche Aspekt einer diffusiven Darstellung ist, dass sich z. B. ein fraktionales Integral einer Funktion f am Datenpunkt t_j darstellen lässt als Integral $\int_J \phi(w, t_j)\,\mathrm{d}w$ über eine Hilfsfunktion ϕ, die sich als Lösung einer von f abhängigen gewöhnlichen Differentialgleichung *erster* Ordnung ergibt. Der Integrationsbereich J ist hierbei üblicherweise $(0, \infty)$ oder $(-\infty, \infty)$, also unbeschränkt. Für die numerische Auswertung der diffusiven Darstellung stellen sich somit die Fragen nach effizienten Methoden (a) zur Lösung der gegebenen Differentialgleichung erster Ordnung, und (b) zur numerischen Bestimmung des genannten Integrals. Zahlreiche in der Literatur vorgeschlagene Ansätze verwenden für den Punkt (b) weitgehend unüberlegt gewählte Quadraturformeln, die die grundlegenden analytischen Eigenschaften des Integranden nicht berücksichtigen und somit relativ langsam konvergieren. Wir stellen eine Konstruktionsmethode [1, 2] vor, die diese Schwäche vermeidet und somit zu sehr effizienten Algorithmen führt. Eine wichtige Frage dabei ist, wie sich die Wahl des Quadraturverfahrens auf die Steifheit der im Rahmen des Gesamtansatzes zu lösenden Differentialgleichung und auf das Verhalten der hierzu gehörigen numerischen Lösungsverfahren auswirkt.

Literatur

[1] K. Diethelm: *A new diffusive representation for fractional derivatives, Part II: Convergence analysis of the numerical scheme.* Mathematics **10** (2022), Article No. 1245.

[2] K. Diethelm: *A new diffusive representation for fractional derivatives, Part I: Construction, implementation and numerical examples.* Erscheint in A. Cardone, M. Donatelli, F. Durastante, R. Garrappa, M. Mazza & M. Popolizio (Eds.): *Fractional Differential Equations: Modeling, Discretization, and Numerical Solvers.* Springer Nature, Singapore (2023).