Selbstkontrollarbeit 1

Vertiefung der Wirtschaftsmathematik und Statistik (Teil Statistik)

18. Januar 2011

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei eine binomialverteilte Zufallsvariablen X mit den Parametern N und π, d.h. die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X \sim B(N, \pi)$ ist gegeben durch:

$$f(x) = \binom{N}{x} \pi^x (1-\pi)^{N-x}$$

1.1

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X mittels der Formel $E(X) = \sum x f(x)$. Verwenden Sie dabei die Beziehung

$$\sum_{y=0}^{N-1} \binom{N-1}{y} \pi^y (1-\pi)^{N-1-y} = 1.$$

1.2

Berechnen Sie nun den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen X, in dem Sie ausnutzen, dass X als Summe bernoulliverteilter Zufallsvariablen dargestellt werden kann.

Aufgabe 2

Im Rahmen einer psychologischen Untersuchung werden drei unterschiedliche Tests an denselben Testpersonen durchgeführt. Die Testergebnisse (Punktzahl) sind jeweils näherungsweise normalverteilt ($N(\mu, \sigma^2)$) mit

$X_1 \sim N(100; 156.25)$ für Test 1,
$X_2 \sim N(120; 204.75)$ für Test 2,
$X_3 \sim N(\mu_3; 243.36)$ für Test 3.

Testperson T_1 erzielt im Test 1 eine Punktzahl von 75, im Test 2 eine Punktzahl von 150 Punkten und im Test 3 eine Punktzahl von 110 Punkten. Es ist von der Unabhängigkeit der Testergebnisse auszugehen. Verwenden Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Verteilungstabelle.

2.1

Berechnen Sie unter der Normalverteilungsannahme, wieviel Prozent der Testpersonen im Test 1 eine höhere Punktzahl als Testperson T_1 erreichen.

2.2

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, wiewiel Prozent der Testpersonen bei Betrachtung der ersten beiden Tests eine geringere Gesamtpunktzahl als Testperson T_1 erreichen.

2.3

Im dritten Test erzielen 20.9% der Testpersonen eine geringere Punktzahl als Testperson T_1. Berechnen Sie den Erwartungswert μ_3.

2.4

Geben Sie die Verteilung der Gesamtpunktzahl aus allen drei Tests an.

Aufgabe 3

Gegegen sind N unabhängig standardnormalverteilte Zufallsvariablen X_n, $n = 1, ..., N$. Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten mittels Verteilungstabelle.

3.1

Bestimmen Sie für $X = \sum_{n=1}^{25} X_n^2$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 13.12)$.

3.2

Bestimmen Sie für $X = \sum_{n=1}^{14} X_n^2$ die Wahrscheinlichkeit $P(4.66 \leq X \leq 7.79)$.

3.3

Bestimmen Sie für $X = \sum_{n=1}^{41} X_n^2$ die Wahrscheinlichkeit $P(24.5 \leq X \leq 40.5)$.

3.4

Bestimmen Sie für $X = \sum_{n=1}^{51} X_n^2$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq -7)$.

Aufgabe 4

Die Zufallsvariable X sei t-verteilt mit 25 Freiheitsgraden. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mittels Verteillungstabelle.

4.1

Bestimmen Sie $P(2.06 \leq X \leq 3.45)$.

4.2

Bestimmen Sie $P(X \leq 1.708)$.

4.3

Bestimmen Sie $P(X \geq 1.316)$.

4.4

Für welchen Bereich um den Erwartungswert gilt $P(u \leq X \leq o) = 0.5$?

Aufgabe 5

5.1

Die Zufallsvariable X sei F-verteilt mit 10 und 15 Freiheitsgraden. Bestimmen Sie mittels Verteilungstabelle die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2.54)$ und geben Sie das Quantil $f(0.05, 15, 10)$ an.

5.2

Die Zufallsvariable X sei t-verteilt mit 20 Freiheitsgraden. Bestimmen Sie mittels Verteilungstabelle die Wahrscheinlichkeit $P(X^2 \geq 8.1)$.

5.3

Gegegen sind 5 unabhängig standardnormalverteilte Zufallsvariablen X_n, $n = 1, ..., 5$. Bestimmen Sie mittels Verteilungstabelle die Wahrscheinlichkeit $P\big(\frac{X_5^2}{\sum_{n=1}^5 X_n/5} \leq 6.61\big)$.

Aufgabe 6

6.1

Überprüfen Sie folgende Aussage auf seine Richtigkeit. Geben Sie eine Begründung an:

Eine erwartungstreue Schätzfunktion besitzt auch die Eigenschaft der Effizienz; eine effiziente Schätzfunktion muss dagegen nicht erwartungstreu sein.

6.2

Gegeben sind unabhängig, identisch normalverteilte Zufallsvariablen X_n, $n = 1, ..., N$ mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Überprüfen Sie, ob

$$X_g = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^{N/2} X_{2n} \quad (N \text{ gerade}) \quad \text{bzw.} \quad X_u = \frac{2}{N-1} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} X_{2n} \quad (N \text{ ungerade})$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für den Erwartungswert μ ist.

6.3

Gegeben ist eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Begründen Sie, ob die Transformation $Y = \frac{2}{a}X + 3b^2$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\frac{2}{a}\mu$ und Varianz $\frac{4}{a^2}\sigma^2 + 9b^4$ ist.

6.4

Gegeben sind unabhängig, identisch normalverteilte Zufallsvariablen X_n, $n = 1, ..., N$ mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Zeigen Sie mittels der binomischen Formel die Erwartungstreue von $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum (X_n - \overline{X})^2$.

Aufgabe 7

7.1

Zeigen Sie, dass der Stichprobenmittelwert

$$\overline{X} = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

eine effiziente Schätzfunktion für den unbekannten Mittelwert μ einer normalverteilten Grundgesamtheit ist.

7.2

Gegeben sei eine normalverteilte Grundgesamtheit mit bekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Vergleichen Sie die Schätzer $S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \overline{X})^2$ und $S_*^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \mu)^2$ bezüglich ihrer Effizienz.

Aufgabe 8

Bei der Herstellung von Wellen sind alle Wellen Ausschuss, deren Länge mehr als 1 mm vom Sollmaß 100 mm abweicht.

Die zufällig schwankende Länge hat den Erwartungswert 100 mm und die Standardabweichung von $0.1\ mm$. Wie groß ist der Ausschussanteil höchstens? (Verwenden Sie die Variante $P(|X - \mu| \geq c\sigma) \leq \frac{1}{c^2}$ der Tschebyscheff-Ungleichung)

Aufgabe 9

Gegeben sei eine Stichprobe $X_1, ..., X_N$, wobei die $X_n, n = 1, ..., N$ unabhängig und identisch verteilt sind.

9.1

Erläutern Sie das Prinzip der Momentenmethode.

9.2

Geben Sie für normalverteilte Stichprobenvariablen X_n mit $X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ die Momentenschätzer $\hat{\mu}$ und $\widehat{\sigma^2}$ an.

9.3

Für die stetige Gleichverteilung über dem Intervall $[a; b]$ ist die Dichtefunktion gegeben durch:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Momentenschätzer $\hat{a}$ und $\hat{b}$. Es gilt $E(X) = \frac{a+b}{2}$ und $\operatorname{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Aufgabe 10

10.1

Gegeben seien die Stichprobenvariablen $X_1, ..., X_N$, wobei die $X_n, n = 1, ..., N$ unabhängig und identisch exponentialverteilt sind mit $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Berechnen Sie den ML-Schätzer für λ.

10.2

Gegeben seien die Stichprobenvariabelen $X_1, ..., X_N$, wobei die $X_n, n = 1, ..., N$ unabhängig und identisch Poisson-verteilt sind mit $Ps(x|\mu) = f_X(x|\mu) = \frac{1}{x!}\mu^x e^{-\mu}$. Berechnen Sie den ML-Schätzer für μ.

Aufgabe 11

Gegeben sei eine GG mit Umfang N, in der jedes Element die Eigenschaft A oder $\overline{A}$ besitzt mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A) = P(\overline{A}) = 1/2$. Die relative Häufigkeit $f_N(A)$ ist ein Punktschätzer für $P(A)$.

11.1

Berechnen Sie für $N = 8$ und $N = 15$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Punktschätzer $f_N(A)$ die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ genau trifft.

11.2

In einer Stichprobe vom Umfang $N = 40$ sind 18 Elemente mit der Eigenschaft A. Berechnen Sie die approximativen 95%-Konfidenzintervalle für $P(A)$ (einseitig und zweiseitig).

Aufgabe 12

Überprüfen sie folgende Aussagen über ein zweiseitiges Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ einer Grundgesamtheit auf ihre Richtigkeit. Begründen Sie Ihre Antworten.

12.1

Die Grenzen eines 95%-Konfidenzintervalls sind Zufallsvariablen.

12.2

Mit wachsendem Stichprobenumfang wird das 95%-Konfidenzintervall im Allgemeinen breiter.

12.3

Bei gleichem Datensatz ist das 95%-Konfidenzintervall breiter als das 90%-Konfidenzintervall.

12.4

Die Wahrscheinlichkeit, dass die obere Grenze des zweiseitigen 95%-Konfidenzintervalls kleiner als μ ist, beträgt 0.05.

Aufgabe 13

13.1

Eine aus einer Grundgesamtheit mit normalverteiltem X gezogene einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $N = 16$ ergab $\overline{x} = 5$ und $s^2 = 25$. Berechnen Sie das zweiseitige 99%-Konfidenzintervall für μ.

13.2

In einer Umfrage stimmten in einer Zufallsstichprobe von 225 Studenten einer Universität 45 Studenten für die Einführung mündlicher Nachprüfungen. Es liegt näherungsweise eine Binomialverteilung mit dem Anteilswert π zugrunde. Berechnen Sie die approximativen einseitigen 95%-Konfidenzintervalle für π.

13.3

Untersucht wird das Haushaltsnettoeinkommen 5000 Privathaushalten. Dazu wird eine Stichprobe vom Umfang $N = 100$ betrachtet. Als Stichprobenvarianz ergibt sich $s^2 = 950625$. Bestimmen Sie das zweiseitige 95%-Konfidenzintervall für σ^2.

Aufgabe 14

Überprüfen sie folgenden Aussagen über Signifikanztests auf ihre Richtigkeit. Begründen Sie Ihre Antworten.

14.1

Ein Signifikanzniveau von α bedeutet, dass die Nullhypothese mit einer Wahrscheinlichkeit von α falsch ist.

14.2

Wenn die Nullhypothese abgelehnt wird, so kann sie mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens α trotzdem richtig sein.

14.3

Bei einem einseitigen Test ist die Alternativhypothese genau dieselbe wie bei einem zweiseitigen Test.

14.4

Liegt die Prüfgröße im Annahmebereich der Verteilung der Prüfgröße unter der Alternativhypothese, so kann H_0 nicht verworfen werden.

Aufgabe 15

Ein Automobilproduzent A behauptet, dass die Laufleistung eines bestimmten Models mindestens $\mu_0 = 100000\ km$ beträgt, bei einer Standardabweichung von $\sigma = 30000\ km$. Ein konkurrierender Automobilproduzent B möchte diese Behauptung widerlegen ($\alpha = 0.05$). Der Automobilproduzent B ermittelt in einer Stichprobe vom Umfang $N = 36$ eine durchschnittliche Laufleistung von $\overline{x} = 90000\ km$.

Aufgabe 16

Überprüft werden soll, ob die mittlere Füllmenge μ von Flaschen bei einer laufenden Produktion von 500 ml abweicht. Eine Stichprobe vom Umfang $N = 25$ liefert $\overline{x} = 490$ und $s = 25$. Die Füllmenge X sei approximativ normalverteilt. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich ($\alpha = 0.05$).

Wie entscheiden Sie sich?

- ☐ Die Nullhypothese wird verworfen.
- ☐ Die Nullhypothese wird nicht verworfen.

Welche Interpretation Ihrer Entscheidung ist richtig?

- ☐ Die Nullhypothese ist statistisch abgesichert.
- ☐ Die Alternativhypothese ist statistisch abgesichert.
- ☐ Dass die Alternativhypothese zutrifft, kann ausgeschlossen werden.
- ☐ Dass die Nullhypothese zutrifft, ist nicht statistisch abgesichert.

Aufgabe 17

Bei einer im Vorjahr durchgeführten Vollerhebung der Altersstruktur der Bevölkerung einer Großstadt wurde ein Durchschnittsalter von 38 Jahren bei einer Standardabweichung von 8 Jahren festgestellt. Durch eine im laufenden Jahr durchgeführte Stichprobenerhebung vom Umfang $N = 100$ soll geprüft werden, ob eine signifikante Änderung des Durchschnittsalters eingetreten ist. In der Stichprobe wird ein Durchschnittsalter von $\overline{x} = 39$ Jahren ermittelt. Es ist ein Signifikanzniveau von 5% zugrunde zu legen. Die bei der

Erhebung im Vorjahr ermittelte Standardabweichung von $\sigma = 8$ kann als gleichbleibend vorausgesetzt werden.

Aufgabe 18

Der Hersteller einer Drehmaschine gibt an, dass seine Maschine sehr genau arbeitet. Er belegt diese Behauptung mit der Angabe, dass die approximativ normalverteilten Durchmesser der gedrehten Teile eine Varianz von $\sigma^2 = 0.01$ aufweisen. Eine Versuchsserie des Käufers vom Umfang $N = 32$ ergab eine empirische Varianz von $s^2 = 0.012$. Kann die Angabe des Herstellers als falsch angesehen werden ($\alpha = 0.05$)?

Aufgabe 19

Eine neue Abfüllanlage, mit der eine Flüssigkeit in 0.5 l Flaschen abgefüllt wird, soll eine geringe Abweichung der Füllmenge aufweisen. Die Füllmenge sei normalverteilt. Überprüft werden soll die Nullhypothese, dass eine durchschnittliche Abweichung vom Sollwert höchstens 10 ml beträgt ($\alpha = 0.1$). Eine Stichprobe von 50 Flaschen ergab einen Mittelwert von 498 ml und eine empirische Varianz von 125.

Aufgabe 20

Zwei Wäschetrockner vom Typ X und Typ Y werden bezüglich ihres Energieverbrauchs miteinander verglichen. Untersucht werden soll zum Niveau 0.05 ob sich signifikante Unterschiede nachweisen lassen. Von Typ X (Y) wurden $N = 15$ ($M = 10$) Trockner bei einem durchschnittlichen Verbrauch von $\overline{x}_x = 3.15$ ($\overline{x}_y = 2.55$) kWh und einer empirischen Varianz von $s_x^2 = 0.6$ ($s_y^2 = 0.4$) kWh betrachtet. Es kann von der Normalverteilungsannahme und der Varianzhomogenität ($\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$) ausgegangen werden.

Aufgabe 21

Ein Mentor des Fachs Statistik hat in zwei verschiedenen Städten Probeklausuren durchgeführt. Dabei wurde die durchschnittliche Zeit bestimmt, in der die Studenten eine Aufgabe gelöst haben. Zum Niveau 0.1 soll die Nullhypothese, die Varianzen beider Gruppen seien gleich, überprüft werden ($N = 15, M = 20, s_x = 5.3, s_y = 3.5$).

Aufgabe 22

Aufgrund von erhöhten Kreditverlusten, möchte eine Bank die Bewertungskriterien bei der Kreditvergabe verbessern. Ungeachtet des Risikos, keine Veränderung der Bewertungskriterien vorzunehmen, obwohl der Anteil über 15% liegt (Fehler 2. Art), möchte die Bank nur in eine Verbesserung der Bewertungskriterien investieren, wenn statistisch nachgewiesen werden kann, dass der Anteil von gewährten Krediten mit Rückzahlungsschwierigkeiten mehr als 15% beträgt. In einer Stichprobe vom Umfang $N = 50$ Kreditnehmern sind $x = 15$ Kreditnehmer mit Rückzahlungsschwierigkeiten (Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$).

Aufgabe 23

In einer Großstadt soll der Anteil der Beamten unter den Erwerbstätigen mindestens 20 % betragen. In einer Stichprobe vom Umfang $N = 100$ befinden sich 15 Beamte. Kann die Behauptung bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ widerlegt werden?

Aufgabe 24

Ein Würfel wird 120mal mit folgenden Häufigkeiten für die verschiedenen Augenzahlen geworfen:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	20	22	17	18	19	24

Überprüfen Sie mit Hilfe des χ^2-Tests, ob es sich um einen gefälschten Würfel handelt ($\alpha = 0.1$).

Aufgabe 25

Es besteht eine Vermutung (Nullhypothese), dass die Körpergröße von Studenten approximativ normalverteilt ist mit Mittelwert 170 cm und Standardabweichung 10 cm. Eine bei 500 Studenten durchgeführte Messung der Körpergröße führte zu folgendem Ergebnis:

Körpergröße (in cm)	< 140	$[140; 170)$	$[170; 190)$	$[190; 200)$	≥ 200
Anzahl der Studenten	2	200	265	32	1

Kann aus diesem Ergebnis die aufgestellte Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden?

Aufgabe 26

An 64 Testpersonen wurde überprüft, welches von zwei Schlafmitteln (X und Y) wirksamer ist. Die Wirksamkeit wurde durch die Schlafdauer ermittelt. Bei 38 Personen führte das Schlafmittel X einen längeren Schlaf herbei. Untersuchen Sie mittels eines geeigneten Tests, ob die Schlafmittel unterschiedlich wirken ($\alpha = 0.05$).

Aufgabe 27

Ein Erdölkonzern möchte feststellen, ob ein neu entwickelter Kraftstoffzusatz zur Verschleißminderung in Ottomotoren den Benzinverbrauch beeinflusst.

Bei zehn Testfahrzeugen wurden folgende Werte beobachtet:

Verbrauch l/100 km	1	2	3	4	5
mit Zusatz (X)	8.3	10.2	8.1	7.4	10.8
ohne Zusatz (Y)	8.8	10.6	8.7	7.9	10.7

Verbrauch l/100 km	6	7	8	9	10
mit Zusatz (X)	12.5	12.2	9.8	10.2	8.4
ohne Zusatz (Y)	13.2	12.9	9.6	10.1	8.9

Führen Sie für die Nullhypothese H_0 : „Der Zusatz beeinflusst den Benzinverbrauch nicht“ den Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test durch ($\alpha = 0.05$).

Aufgabe 28

Ein Schuhhändler möchte zwei seiner Angestellten bezüglich ihrer Anzahl verkaufter Paar Schuhe in den letzten 10 Tagen miteinander vergleichen. Dazu verwendet er den Wilcoxon-Rangsummen-Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$.

	# Schuhpaare pro Tag									
X	14	13	18	17	19	25	21	11	8	14
Y	24	15	20	17	12	24	26	22	25	16

Aufgabe 29

Zugrundegelegt sei ein normalverteiltes Merkmal mit unbekannntem Erwartungswert und bekannter Varianz $\sigma^2 = 9$. Betrachtet wird das Testproblem

$$H_0 : \mu_0 = 100 \qquad\qquad H_1 : \mu_0 \neq 100$$

mit N=20 und $\alpha = 0.05$. Als kritische Werte werden 100 ± 1.3 berechnet. Der Beibehaltungsbereich lautet somit

$$\{\overline{x} \mid 98.7 \leq \overline{x} \leq 101.3\}.$$

Bestimmen Sie unter der Annahme, dass der tatsächliche Wert von μ bei 102 (100.5) liegt, d.h. die Nullhypothese trifft nicht zu, die Wahrscheinlichkeit β, dass H_0 dennoch nicht verworfen wird.

Aufgabe 30

Eine Variable X ist normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und der bekannten Varianz $\sigma^2 = 25$. Zu prüfen ist die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq \mu_0 = 1000$ beim Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ und bei einem Stichprobenumfang von $N = 64$.

30.1

Ermitteln Sie die kritische Region des hier zu verwendenden Standardtests.

30.2

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art, wenn $\mu = \mu_1 = 998$ ist.

30.3

Ermitteln Sie den Stichprobenumfang, der im vorliegenden Fall nötig ist, damit die in 30.2 genannte Wahrscheinlichkeit höchstens 0.05 beträgt.