Teil 1

Kurseinheit 1

Inhalt der Kurseinheit

Bevor es los geht: Studierhinweise und Notationen

Studierhinweise

Der vorliegende Kurs Maß- und Integrationstheorie führt in ein zentrales Gebiet der Analysis ein. Die moderne Maß- und Integrationstheorie ist für zahlreiche Gebiete der reinen Mathematik (z. B. Funktionalanalysis, Differentialgeometrie) und der angewandten Mathematik (insbesondere in Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischer Statistik) unverzichtbar. Auch für Anwendungen der Mathematik in Physik, Technik oder Wirtschaftswissenschaften spielt die Maß- und Integrationstheorie eine wichtige Rolle. In diesem Kurs tragen wir die – unserer Meinung nach – wichtigsten Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie zusammen, wie sie jeder Mathematiker kennen sollte.

Der vorliegende Kurs 01145 Maß- und Integrationstheorie ist fester Bestandteil des Bachelorstudiengangs „Mathematik“. Vollzeitstudierenden raten wir den Kurs im dritten Semester zu bearbeiten (bei Studienbeginn im Wintersemester) oder im zweiten Semester (bei Studienbeginn im Sommersemester). Bei Teilzeitstudierenden raten wir den Kurs im fünften bzw. vierten Semester zu belegen. Für Studierende andere Studiengänge (wie Diplom oder Master) kann der Kurs eine sinnvolle Ergänzung im Bereich Analysis und/oder Stochastik sein.

Im Lehrtext sind viele Aufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit eingestreut, zu denen Sie Musterlösungen im Anhang des jeweiligen Kapitels finden. Wir empfehlen sehr dringend, dass Sie diese Aufgaben zunächst selbstständig versuchen zu lösen. Konsultieren Sie die Musterlösung erst dann, wenn Sie die Aufgabe selbst gelöst haben oder wirklich nicht mehr weiterkommen. Mathematik lernt man vor allem durch Problemlösen. Neben den Aufgaben im Text dienen dazu insbesondere die Einsendeaufgaben. Zu jeder Kurseinheit erhalten Sie (in der Regel fünf)

Einsendeaufgaben, für deren Bearbeitung Sie jeweils zwei Wochen Zeit haben (ab offiziellem Bearbeitungsbeginn der Kurseinheit). Die von Ihnen eingeschickten Lösungen erhalten Sie korrigiert zurück. Die aktive Teilnahme an der Lösung dieser Aufgaben ist nicht einfach *ein zusätzliches* Angebot; es ist vielmehr *die zentrale* Möglichkeit, den Stoff zu erlernen und zu vertiefen. Auch die Klausur zum Abschluss des Kurses wird aus Aufgaben bestehen, die mit Einsendeaufgaben vergleichbar sind.

Als Vorwissen wird für diesen Kurs nur der Kurs 01141 „Mathematische Grundlagen" vorausgesetzt. Natürlich können Sie dieses Grundwissen auch auf andere Art erworben haben, etwa durch die Kurse Analysis (01134) und Lineare Algebra (01104). An einigen Stellen dieses Kurses benötigen wir Konzepte und Ergebnisse aus der linearen Algebra, wie sie z. B. im Kurs 01143 vermittelt werden. Wenn Sie diesen Kurs *gleichzeitig* belegen, haben Sie diese Kenntnisse dort bereits erworben, bevor Sie im vorliegenden Kurs gebraucht werden.

An einigen Stellen benötigen wir Kenntnisse aus der Analysis, die in den „Mathematischen Grundlagen" nicht enthalten sind. Diese Begriffe, Resultate und meist auch Beweise sind im vorliegenden Kurs enthalten. Der Kurs Analysis (01144) kann dafür zur Vorbereitung oder Vertiefung dienen, sein Inhalt wird jedoch für den vorliegenden Kurs *nicht* benötigt.

Es gibt eine Anzahl guter Lehrbücher über Maß- und Integrationstheorie. Wir haben uns für diesen Kurs insbesondere an den folgenden Monografien orientiert, die wir dem Leser auch zur Vertiefung und Abrundung des Stoffs empfehlen können:

Heinz Bauer: Maß- und Integrationstheorie
2. Auflage, de Gruyter 1992

und

Jürgen Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie
2. Auflage, Springer 1998 .

Letzteres Buch zitieren wir z. B. im Text gelegentlich als *Elstrodt*.

Auf den Kurs 01141 Mathematische Grundlagen verweisen wir durch Hinweise wie „MG, Kapitel 17".

An dieser Stelle danken wir der Autorin von MG, Frau Prof. Dr. Unger für wertvolle Starthilfe zum Schreiben des vorliegenden Kurses.

Darüber hinaus empfehlen wir Ihnen Lehrbücher aus der Analysis, z.B.

Martin Barner, Friedrich Flohr, Analysis I und II

de Gruyter 2000 und 1989

Otto Forster, Analysis 1-3
Vieweg + Teubner 2008-2009

Walter Rudin, Analysis
Oldenburg 1998

und (in Englisch):

Serge Lang, Real Analysis
Addison-Wesley 1983

Der Kurs Maß- und Integrationstheorie beginnt in Kurseinheit 1 mit einer Wiederholung und Vertiefung des Riemann-Integrals. Sie lernen außerdem Begriffe wie gleichmäßige Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz und das Riemann-Stieltjes-Integral kennen.

Kurseinheit 2 ist verschiedenen Grundlagen gewidmet, die Sie für die folgenden Kurseinheiten brauchen. Es bietet einen Mix aus Mengenlehre, Analysis, Topologie und Funktionalanalysis. Alle nötigen Begriffe werden eingeführt, die meisten Resultate bewiesen.

Kurseinheit 3 und 4 entwickeln die Theorie der Maße. Dabei ist das Volumenmaß in $\mathbb{R}^d$ (Lebesgue-Maß) von beispielgebender Bedeutung, aber auch andere wichtige Maße werden eingeführt und ausführlich diskutiert.

Kurseinheit 5 behandelt die Integrationstheorie, die auf der Maßtheorie aufbaut. Wir definieren das Lebesgue-Integral und seine Verwandten und zeigen insbesondere die wichtigen Konvergenzsätze (Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von der majorisierten Konvergenz).

Kurseinheit 6 beschäftigt sich schwerpunktmäßig mit der Integration im $\mathbb{R}^d$.

Die abschließende Kurseinheit 7 gibt einen Überblick über weitere Themen der Maß- und Integrationstheorie und insbesondere einen Ausblick auf wichtige Anwendungsgebiete in Funktionalanalysis und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Noch eine Bitte in eigener Sache: Leider wird dieser Kurs trotz mehrfachem Korrekturlesen Druckfehler und Unstimmigkeiten enthalten. Vielleicht ist auch die eine oder andere Argumentation unverständlich oder fehlerhaft. Möglicherweise wünschen Sie sich einige Themen ausführlicher oder weniger ausführlich behandelt. Bitte teilen Sie uns dies alles mit. Wir sind bei der Verbesserung des Textes auf Ihre Mitwirkung angewiesen und für Ihre Hinweise dankbar!

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg (und vielleicht auch ein bisschen Spaß) beim Bearbeiten des Kurses.

Mathematische Notationen

$A := B$ bedeutet: „A wird definiert als B“.

$\mathbb{N}$ bezeichnet die natürliche Zahlen: $\{1, 2, \dots\}$, bei $\mathbb{N}_0$ nehmen wir noch die Null dazu, also $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. $\mathbb{Z}$ sind die ganzen Zahlen und $\mathbb{Q}$ sind die rationalen Zahlen, also die Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{R}$ bezeichnet die reellen Zahlen, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Wir nennen eine reelle Zahl x positiv, wenn $x \geq 0$ ist. Wenn wir $x > 0$ meinen, sagen wir x ist strikt positiv.

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x < b\}$

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x < b\}$

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x \leq b\}$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x \leq b\}$

$\emptyset$ ist die leere Menge $\{\ \}$.

$N \subset M$ bedeutet: N ist eine Teilmenge von M. Das heißt, dass jedes Element von N auch ein Element von M ist. Insbesondere gilt für jede Menge M: $\emptyset \subset M$ und $M \subset M$. $N \subsetneq M$ heißt $N \subset M$, aber $N \neq M$. Zwei Mengen M und N heißen disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben, wenn also $M \cap N = \emptyset$ gilt.

Mengendifferenzen schreiben wir $A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$. Wir schreiben auch $\complement A := M \setminus A$ für das Komplement von A, wenn die Grundmenge M aus dem Zusammenhang klar ist.

Sind f und g Abbildungen mit $f : M \to N$ und $g : N \to K$, dann ist die Abbildung $g \circ f : M \to K$ definiert durch $(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (oder monoton steigend oder isoton), wenn aus $x < y$ folgt, dass $f(x) \leq f(y)$ gilt und streng monoton wachsend (oder streng monoton steigend oder streng isoton), wenn aus $x < y$ die Aussage $f(x) < f(y)$ folgt. Entsprechend folgt aus $x < y$ für monoton fallende (oder antitone) Funktionen, dass $f(x) \geq f(y)$ ist, und für streng monoton fallende (oder streng antitone) Funktionen, dass $f(x) > f(y)$ gilt.

Sind A und B Aussagen, dann ist die Konjunktion $A \wedge B$ von A und B diejenige Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind. Die Disjunktion $A \vee B$ von A und B ist diejenige Aussage, die genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr sind. Die Aussprache von $A \wedge B$ ist „A und B“ und die von $A \vee B$ ist „A oder B“.

Die Implikation $A \Longrightarrow B$ von Aussagen A und B bedeutet: Ist A wahr, dann ist B wahr. Sie wird als „aus A folgt B“ oder „A impliziert B“ ausgesprochen. Insbesondere gilt: Die Implikation $A \Longrightarrow B$ ist schon dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist. „aus Falschem kann man Alles folgern.“ Analog bezeichnet $A \Longleftarrow B$: Ist B wahr, dann ist A wahr. Sie wird als „aus B folgt A“ oder „B impliziert A“ ausgesprochen.

Die Äquivalenz $A \iff B$ von Aussagen A und B bedeutet $A \Longrightarrow B$ und $A \Longleftarrow B$. Sie wird als „A und B sind äquivalent“ ausgesprochen. Häufig werden wir in diesem Kurs Äquivalenzen $A \iff B$ dadurch zeigen, dass wir im ersten Teil des Beweises $A \Longrightarrow B$ zeigen, das deuten wir durch „$\Rightarrow$“ am Beginn dieses Beweisteiles an, und dann im zweiten Teil die Implikation $A \Longleftarrow B$ (also $B \Longrightarrow A$) zeigen, was wir durch ein „$\Leftarrow$“ einleiten.

Eine Aussage „es gibt ein x“ wird mit Hilfe vom Existenzquantor $\exists$ ausgedrückt: $\exists_x$. Die Aussage $\exists_{x \in M} A(x)$ bedeutet: „Es gibt ein $x \in M$ und für dieses x gilt die Aussage $A(x)$.“ Der Allquantor $\forall$ wird verbal durch „Für alle“ ausgedrückt; $\forall_x$ bedeutet „für alle x“. Insbesondere bedeutet $\forall_{x \in M} A(x)$: „Für alle $x \in M$ gilt die Aussage $A(x)$.“ noch ausführlicher geschrieben: „Für alle x gilt: $x \in M \Longrightarrow A(x)$.“

Zur Notation von Folgen verwenden wir zwei Notationen, einmal mit runden Klammern und einmal mit geschweiften Klammern: $(x_i)_i$ und $\{x_i\}_i$. Erstere Notation kennen Sie bereits aus MG, Definition 13.1.1. Beide Notationen benutzen wir gleichwertig.

Sie werden feststellen, dass sich einige Notationen von denen unterscheiden, die Sie z. B. in den „Mathematischen Grundlagen“ oder aus anderen Quellen kennen. Dies läßt sich leider nicht verhindern, da Notationen nicht universell und überall identisch sind. Z. B. können sich in verschieden Gebieten der Mathematik unterschiedliche Sprech- und Schreibweisen für das gleiche Objekt etablieren. Wir werden unser möglichstes tun, um alle Notationen vor der Benutzung zu erklären.

Griechische und andere Buchstaben

Wie in der Mathematik üblich und wohl unvermeidlich benutzen wir Buchstaben des griechischen Alphabets, insbesondere

α	sprich: „alpha“,	das griechische „a“
β	sprich: „beta“,	das griechische „b“
γ	sprich: „gamma“,	das griechische „g“
δ	sprich: „delta“,	das griechische „d“
Δ	sprich: „Delta“,	das griechische „D“
ε	sprich: „epsilon“,	das griechische „e“
λ	sprich: „lambda“,	das griechische „l“
Λ	sprich: „Lambda“,	das griechische „L“
μ	sprich: „mü“,	das griechische „m“
ν	sprich: „nü“,	das griechische „n“
χ	sprich: „chi“,	das griechische „ch“
ω	sprich: „omega“,	das griechische (lange) „o“
Ω	sprich: „Omega“,	das griechische (lange) „O“

Darüber hinaus benutzen wir „Schönschrift-Buchstaben“, wie $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathfrak{I}$, die man (z. B.) „Skript-A“, „Skript-C“, „Skript-I“ usw. spricht.

Kapitel 1

Das Riemann-Integral

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem „Riemann-Integral“, das Sie aus dem Kurs „Mathematische Grundlagen“ – und vielleicht auch aus der Schule – kennen.

Wir werden zunächst die Definition wiederholen und an einige wichtige Eigenschaften erinnern, andere neu beweisen.

Zur Vorbereitung auf dieses Kapitel empfehlen wir Ihnen, sich noch einmal den Inhalt des Kapitels 19 (aus Kurseinheit 7) des Kurses „Mathematische Grundlagen“ ins Gedächtnis zu rufen. Sie werden außerdem die Begriffe „Grenzwerte von Folgen“ (Kapitel 12) und „Stetigkeit“ sowie „Grenzwerte von Funktionen“ (Kapitel 14) aus diesem Kurs brauchen. Im Folgenden kürzen wir den Kurs „Mathematische Grundlagen“ als „MG“ ab. Ein Zitat wie zum Beispiel „MG 15.3.4“ weist auf die Definition der Konvergenz einer Funktion im Kapitel 15 Abschnitt 3 des Kurses Mathematische Grundlagen hin.

1.1 Definition und elementare Eigenschaften

1.1.1 Vereinbarung: Im Folgenden sind a und b reelle Zahlen, für die $a < b$ gilt.

1.1.2 Definition: Eine **Partition** des Intervalls $[a, b]$ ist eine Folge P von endlich vielen reellen Zahlen $t_0, t_1, \ldots, t_n$ für die gilt:

(1) $t_0 = a\,,\ t_n = b$,

(2) $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

Die Zahlen $t_0, \ldots, t_n$ heißen die **Stützpunkte** von P, wir schreiben die Partition P auch als $P = \langle t_0, \ldots, t_n \rangle$. Die Menge aller Partitionen von $[a, b]$ bezeichnen wir mit $Z([a, b])$.

1.1.3 Beispiel: Zu $a < b$ und $n \in \mathbb{N}$ wird durch $t_k := a + k\,\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \ldots, n$ eine Partition des Intervalls $[a, b]$ erklärt. Weil für *diese* Partition die Abstände $t_k - t_{k-1}$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gleich sind (nämlich gleich $\frac{b-a}{n}$), sprechen wir auch von einer Partition mit **äquidistanten Stützpunkten** oder auch von einer äquidistanten Partition.

1.1.4 Definition: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $P = \langle t_0, \ldots, t_n \rangle$ eine Partition von $[a, b]$, dann setzen wir für $i = 1, \ldots, n$:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \le x \le t_i\} \tag{1.1}$$

und

$$M_i = \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \le x \le t_i\}. \tag{1.2}$$

Wir definieren die **Untersumme** $\mathcal{U}(f, P)$ als

$$\mathcal{U}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \tag{1.3}$$

und die **Obersumme** $\mathcal{O}(f, P)$ als

$$\mathcal{O}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}). \tag{1.4}$$

1.1.5 Bemerkung: Nur wenn f beschränkt ist, sind alle m_i und alle M_i definiert! Deshalb haben wir in Definition 1.1.4 die Beschränktheit von f gefordert.

1.1.6 Definition: Ist $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, dann heißt f **Riemann-integrierbar**, wenn gilt:

$$\sup\{\mathcal{U}(f, P) \mid P \in Z([a, b])\} = \inf\{\mathcal{O}(f, P) \mid P \in Z([a, b])\}.$$

Ist f Riemann-integrierbar, dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{\mathcal{U}(f,P) \mid P \in Z([a,b])\} \quad (= \inf\{\,\mathcal{O}(f,P) \mid P \in Z([a,b])\})$$

das **Riemann-Integral** von f (von a bis b oder auf $[a,b]$).

1.1.7 Bemerkung: Im Kurs MG werden Riemann-integrierbare Funktionen einfach „integrierbar“ genannt. Wir werden in diesem Kurs allgemeinere Integrierbarkeitskonzepte betrachten. Zur Unterscheidung fügen wir hier die Vorsilben „Riemann“ an.

Ist eine Funktion f auf der Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert und $[a,b] \subset M$, dann sagen wir, dass f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, wenn die Einschränkung von f auf das Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist.

1.1.8 Definition: Für $b < a$ definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{1.5}$$

falls f über $[b,a]$ Riemann-integrierbar ist.

Außerdem setzen wir

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{1.6}$$

Im Kurs MG wurde bereits die folgende Formulierung für die Riemann-Integrierbarkeit bewiesen:

1.1.9 Proposition: Ist $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition P von $[a,b]$ gibt, so dass $\mathcal{O}(f,P) - \mathcal{U}(f,P) < \varepsilon$ ist.

Aus dem Kurs MG kennen wir bereits die folgenden Sätze (MG 20.1.16, 20.1.11):

1.1.10 Satz: Sind die Funktionen f und g auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist die Funktion

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \tag{1.7}$$

auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b h(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.8}$$

1.1.11 Satz: Seien $a < c < b$. Dann ist eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ Riemann-integrierbar, wenn sie auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar **ist**, und dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.9}$$

Wir beweisen den folgenden Satz, der die Monotonie des Integrals ausdrückt.

1.1.12 Satz: Sind f und g auf $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktionen und gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.10}$$

Beweis: Da $f(x) \leq g(x)$ gilt, folgt für jede Partition $P \in Z([a,b])$:

$$\mathcal{U}(f,P) \leq \mathcal{U}(g,P)$$

(und $\mathcal{O}(f,P) \leq \mathcal{O}(g,P)$). Also gilt auch

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sup_{P\in Z([a,b])} \mathcal{U}(f,P)\\ &\leq \sup_{P\in Z([a,b])} \mathcal{U}(g,P)\\ &= \int_a^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

1.1.13 Korollar: (a) Ist f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(b) Ist f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und gilt $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ mit Zahlen $m, M \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$m\,(b-a) \;\leq\; \int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; M\,(b-a).$$

Beweis:

(a) Ergibt sich aus dem Beweis von Teil b) mit $m = 0$.

(b) Es sei $h(x) = m$ für alle $x \in [a,b]$. h ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ mit

$$\int_a^b h(x)\,dx = m(b-a).$$

Es gilt

$$h(x) \leq f(x).$$

Also ist nach Satz 1.1.12

$$m(b-a) = \int_a^b h(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Die obere Schranke zeigt man analog. □

1.1.14 Satz: Ist die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und ist f auf allen Intervallen $[c,d] \subset (a,b)$ Riemann-integrierbar, dann ist f auch auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar.

Beweis: Da f beschränkt ist, gibt es ein $C > 0$, so dass für alle $x, y \in [a,b]$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq C$.

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $c, d \in [a,b]$ so, dass $a < c < d < b$ ist und $c - a < \frac{\varepsilon}{4\,C}$ sowie $b - d < \frac{\varepsilon}{4\,C}$ gelten.

Nach Voraussetzung ist f auf $[c,d]$ Riemann-integrierbar, also gibt es (nach Proposition 1.1.9) eine Partition $P' = \langle t_0, \ldots, t_n \rangle$ von $[c,d]$ mit

$$\mathcal{O}(f, P') - \mathcal{U}(f, P') < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Wir setzten $m = \inf\limits_{x \in [a,c]} f(x)$ und $M = \sup\limits_{x \in [a,c]} f(x)$ sowie $\widetilde{m} = \inf\limits_{x \in [d,b]} f(x)$ und $\widetilde{M} = \sup\limits_{x \in [d,b]} f(x)$.

Durch Hinzunahme der Stützstellen a und b zur Partition $P' = \langle t_0, \ldots, t_n \rangle$ entsteht die Partition $P = \langle a, t_0, \ldots, t_n, b \rangle$ von $[a, b]$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(f, P) - \mathcal{U}(f, P) \\
&= (M - m)\,(c - a) \ + \ \mathcal{O}(f, P') - \mathcal{U}(f, P') \ + (\widetilde{M} - \widetilde{m})\,(b - d) \\
&\leq C\,\frac{\varepsilon}{4\,C} \ + \ \frac{\varepsilon}{4} \ + \ C\,\frac{\varepsilon}{4\,C} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Wir beweisen nun, dass „viele“ Funktionen Riemann-integrierbar sind. Wir beginnen mit:

1.1.15 Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$.

> **Notation:** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **monoton steigend**, wenn aus $x < y$ die Ungleichung $f(x) \leq f(y)$ folgt, und **streng monoton steigend**, wenn aus $x < y$ die Ungleichung $f(x) < f(y)$ folgt. Sie heißt **monoton fallend**, wenn aus $x < y$ $f(x) \geq f(y)$ folgt, und **streng monoton fallend**, wenn aus $x < y$ $f(x) > f(y)$ folgt.
> Eine Funktion f heißt **monoton**, wenn sie monoton steigend oder monoton fallend ist.

Beweis: Wir führen den Beweis für eine monoton *steigende* Funktion f, für monoton fallendes f ist der Beweis analog.
Ist $P = \langle t_0, \ldots, t_n \rangle$ eine Partition von $[a, b]$, dann gilt wegen der Monotonie von f:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = f(t_{i-1})$$

und

$$M_i = \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = f(t_i).$$

Daher gilt

$$\mathcal{U}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$$

und
$$\mathcal{O}(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i-t_{i-1}).$$
Deshalb gilt:
$$\mathcal{O}(f,P)-\mathcal{U}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\Big(f(t_i)-f(t_{i-1})\Big)(t_i-t_{i-1}).$$
Wir wählen jetzt $\varepsilon>0$ und eine Partition $P=\langle t_0,\dots,t_n\rangle$ mit
$$\delta(P)=\max_{i=1,\dots,n}(t_i-t_{i-1})<\delta. \tag{1.11}$$
wobei $\delta>0$ ist. Der genaue Wert von δ wird später in Abhängigkeit von ε gewählt. Für eine solche Partition gilt
$$\begin{aligned}\mathcal{O}(f,P)-\mathcal{U}(f,P)&=\sum_{i=1}^{n}\Big(f(t_i)-f(t_{i-1})\Big)\,(t_i-t_{i-1})\\&\le\sum_{i=1}^{n}\Big(f(t_i)-f(t_{i-1})\Big)\,\delta\\&=\delta\,\sum_{i=1}^{n}\Big(f(t_i)-f(t_{i-1})\Big).\end{aligned}$$

Die Summe $\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(f(t_i)-f(t_{i-1})\Big)$ ist eine „Teleskop-Summe“, d. h.:
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\Big(f(t_i)-f(t_{i-1})\Big)&=\Big(f(t_1)-f(t_0)\Big)+\Big(f(t_2)-f(t_1)\Big)\\&\quad+\Big(f(t_3)-f(t_2)\Big)+\dots\\&\quad+\Big(f(t_{n-1})-f(t_{n-2})\Big)+\Big(f(t_n)-f(t_{n-1})\Big).\end{aligned}\tag{1.12}$$
In dieser Summe fallen fast alle Terme weg, weil sie einmal mit „+“ und einmal mit „−“ vorkommen. Übrig bleibt
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\Big(f(t_i)-f(t_{i-1})\Big)&=f(t_n)-f(t_0)\\&=f(b)-f(a).\end{aligned}$$
Daher gilt
$$\mathcal{O}(f,P)-\mathcal{U}(f,P)\le\Big(f(b)-f(a)\Big)\,\delta.$$
Wenn wir also (siehe (1.11)) $\delta(P)<\delta$ so klein machen, dass $\Big(f(b)-f(a)\Big)\,\delta<\varepsilon$ ist, dann gilt
$$\mathcal{O}(f,P)-\mathcal{U}(f,P)<\varepsilon.$$
Also ist f nach Proposition 1.1.9 Riemann-integrierbar. □

Wir wenden uns nun dem folgenden wichtigen Satz zu:

1.1.16 Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

> **Studierhinweis:** *Den Satz 1.1.16 haben Sie bereits als Korollar zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im Kurs MG kennengelernt. Hier geben wir einen anderen, etwas direkteren Beweis. Für diesen Beweis benötigen wir den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit, der auch in anderen Zusammenhängen sehr wichtig ist.*
> *Wenn Sie den Kurs „Analysis“ bearbeitet haben, dann sollten Sie den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit bereits kennen. Für alle, die diesen Begriff nicht (oder nicht mehr) kennen, gibt es den Anhang „Gleichmäßige Stetigkeit“ in diesem Kapitel. Dort wird der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit eingeführt und erläutert. Insbesondere wird dort bewiesen, dass jede auf $[a, b]$ stetige Funktion dort sogar gleichmäßig stetig ist.*

Im Beweis von Satz 1.1.16 benötigen wir folgendes Resultat:

1.1.17 Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ folgt, dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

gilt.

1.1.18 Bemerkung: Dieser Satz besagt, dass zu $\varepsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ *unabhängig* von x (bzw. y) gewählt werden kann.

Den Beweis von Satz 1.1.17 finden Sie im Anhang zu diesem Abschnitt oder im Kurs „Analysis“.

Beweis von Satz 1.1.16:
Zunächst ist die Funktion f wegen MG 15.2.8 beschränkt. Wir setzen zu $n \in \mathbb{N}$:

$$t_k^{(n)} = a + k\frac{b - a}{n}. \tag{1.13}$$

Dann ist

$$P_n = \langle t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)} \rangle$$

eine Partition von $[a, b]$ und es gilt $t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, \ldots, n$. Da die Funktion f nach Voraussetzung auf $[a, b]$ stetig ist, gibt es nach Satz 1.1.17 zu jedem $\varepsilon > 0$

ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{falls } |x-y| < 2\,\frac{b-a}{n}$$

gilt ($x, y \in [a, b]$).

Wir untersuchen nun die Ober- und Untersumme zur Partition P_n:

$$\mathcal{O}(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k \,\frac{b-a}{n},$$
$$\mathcal{U}(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k \,\frac{b-a}{n}.$$

Dabei ist – wie üblich –

$$M_k = \sup_{t_{k-1} \le x \le t_k} f(x), \qquad m_k = \inf_{t_{k-1} \le x \le t_k} f(x). \tag{1.14}$$

Für $x, y \in [t_{k-1}, t_k]$ gilt $|x-y| \le \frac{b-a}{n} < 2\,\frac{b-a}{n}$. Für n groß genug ist also (für $x, y \in [t_{k-1}, t_k]$)

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

und daher auch

$$|M_k - m_k| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(f, P_n) - \mathcal{U}(f, P_n) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \\ &\le \frac{b-a}{n} \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Nach Proposition 1.1.9 ist daher f integrierbar. □

Satz 1.1.16 lässt sich in verschiedene Richtungen verallgemeinern. Hier folgt eine wichtige Verallgemeinerung:

1.1.19 Satz: Ist die Funktion f auf $[a, b]$ beschränkt und gilt für eine endliche Menge M, dass f auf der Menge $[a, b] \setminus M$ stetig ist, dann ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

1.1.20 Aufgabe: Beweisen Sie Satz 1.1.19!

1.1.21 Satz: Ist f stetig auf $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

dann folgt

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in [a, b].$$

Beweis: Angenommen $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a, b]$. Dann muss wegen der Stetigkeit von f gelten, dass es für $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ (und $x \in [a, b]$). Dies impliziert

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \tag{1.15}$$

für alle $|x - x_0| < \delta$ (und $x \in [a, b]$). Es gibt also ein Intervall $[c, d] \subset [a, b]$, $(c < d)$, so dass $f(x)$ die Ungleichung (1.15) für alle $x \in [c, d]$ erfüllt. Also folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\geq \int_c^d f(x)\,dx \\ &\geq \int_c^d \frac{1}{2} f(x_0)\,dx \\ &= \frac{1}{2} f(x_0)(d - c) > 0\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Also war die Annahme, dass $f(x_0) > 0$ ist, falsch. □

1.1.22 Beispiel: Für $f(x) = \sin x$ gilt $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$, aber offenbar ist $f(x)$ nicht für alle $x \in [-1, 1]$ gleich Null. Das ist kein Widerspruch zu Satz 1.1.21, weil $f(x) = \sin x$ in $[-1, 1]$ *nicht* größer oder gleich Null ist.

1.1.23 Aufgabe: Wo haben wir die Voraussetzung $f(x) \geq 0$ im Beweis von Satz 1.1.21 eigentlich verwendet?

1.1.24 Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und gilt für alle $[c, d] \subset [a, b]$

$$\int_c^d f(x)\,dx = 0,$$

dann gilt:

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in [a, b]\,.$$

Beweis: Angenommen $f(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in [a, b]$. Wir dürfen annehmen, dass $f(x_0) > 0$. (Der Beweis ist für $f(x_0) < 0$ völlig analog.)

Wegen der Stetigkeit von f gibt es (wie im vorigen Beweis) ein Intervall $[c, d] \subset [a, b]$ mit $c < d$, so dass

$$f(x) \geq \frac{1}{2}\,f(x_0) > 0$$

für alle $x \in [c, d]$ gilt. Also gilt auch

$$\int_c^d f(x)\,dx \geq \frac{1}{2}\,f(x_0)\,(d - c) > 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Die Aussagen der Sätze 1.1.21 und 1.1.24 sind falsch, wenn man die Stetigkeit von f nicht voraussetzt. Sei dazu

1.1.25 Definition: Ist $A \subset \mathbb{R}$, dann definiert

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.16}$$

die **charakteristische Funktion** $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Menge A.

Dann gilt:

1.1.26 Proposition: $\displaystyle\int_a^b \chi_{\{0\}}(x)\,dx = 0$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch Untersuchung von Ober- und Untersummen und zeigen damit auch die Riemann-Integrierbarkeit. Wir wählen ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ und $0 \in [a, b]$.
(Ist $0 \notin [a, b]$, dann ist $\chi_{\{0\}}(x) = 0$ in $[a, b]$ und damit die Behauptung trivial.)
Ist $P = \langle t_0, \dots, t_n \rangle$ eine Partition von $[a, b]$, dann gilt, dass $\mathcal{U}(\chi_{\{0\}}, P) \geq 0$.
Wir wählen nun P so, dass

$$\delta(P) = \max_{i=1,\dots,n} (t_i - t_{i-1}) < \delta$$

ist. Dann folgt

$$\mathcal{O}(\chi_{\{0\}}, P) \leq \delta\,,$$

also ist $\inf \mathcal{O}(\chi_{\{0\}}, P) = 0 = \sup \mathcal{U}(\chi_{\{0\}}, P) \Rightarrow \chi_{\{0\}}$ ist Riemann-integrierbar und $\int\limits_a^b \chi_{\{0\}}(x)\, dx = 0$.

□

Leider gibt es auch „harmlos wirkende“ Funktionen, die *nicht* Riemann-integrierbar sind. Im Folgenden werden wir dazu ein Beispiel kennenlernen.

1.1.27 Definition: Für $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ heißt die Funktion χ_D die **Dirichletfunktion**.

1.1.28 Bemerkung: Es gilt also

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.17}$$

1.1.29 Satz: Die Dirichletfunktion $\chi_D : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben in (1.17) ist nicht Riemann-integrierbar.

Beweis: In jedem Intervall $[s, t] \subset [0, 1]$ mit $s < t$ liegen sowohl rationale Zahlen als auch irrationale, d. h. $[s, t] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ und $[s, t] \cap \big([0, 1] \setminus \mathbb{Q}\big) \neq \emptyset$. Ist also $P = \langle t_0, t_1, \dots, t_n \rangle$ eine Partition von $[0, 1]$, dann gilt:

$$m_k = \inf\{\chi_D(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\} = 0$$

und

$$M_k = \sup\{\chi_D(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\} = 1.$$

Also gilt $\mathcal{U}(\chi_D, P) = 0$ und $\mathcal{O}(\chi_D, P) = 1$ für jede Partiton P von $[0, 1]$, folglich ist χ_D nicht Riemann-integrierbar. □

1.1 A Anhang: Gleichmäßige Stetigkeit.

In diesem Anhang führen wir den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit ein. Der Anhang ist gedacht für alle, die diesen Begriff noch nicht kennen oder ihn wiederholen wollen.

1.1.30 Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** in M, wenn f in jedem Punkt $x \in M$ **stetig** ist, d. h. zu jedem $x \in M$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ (das von ε und x abhängen darf), so dass gilt:
Aus $y \in M$ und $|y - x| < \delta$ folgt $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

1.1.31 Beispiele:

1. Die Funktion $f : \ (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist in $(0,1)$ stetig.
2. Die Funktion $g : \ (0,1) \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x}$ ist in $(0,1)$ stetig.

Wir beweisen die Stetigkeit von f (aus 1.1.31 Beispiel 1): Wir rechnen

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |y^2 - x^2| \\ &= |y + x| \cdot |y - x| \\ &\leq 2|y - x| \qquad (\text{weil } x, y \in \ (0,1)). \end{aligned}$$

Ist also $\varepsilon > 0$, dann wählen wir

$$\delta = \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{1.18}$$

Ist $|y - x| < \delta$, dann ist

$$|f(y) - f(x)| \leq 2|y - x| < \varepsilon.$$

Beachten Sie, dass wir δ unabhängig von x wählen konnten!

Für das Beispiel 2 in 1.1.31 zeigen wir die Stetigkeit folgendermaßen: Für $x, y > 0$ ist

$$|g(y) - g(x)| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x - y|}{xy}.$$

Ist also $\varepsilon > 0$, dann ist $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ falls $|x - y| < \varepsilon xy$. Wählen wir

$$\delta = \min\left(\varepsilon\frac{x^2}{2}\,, \,\frac{x}{2}\right), \tag{1.19}$$

dann folgt aus $|x-y|<\delta$ zunächst

$$\begin{aligned} y &= x-(x-y) \\ &\geq x-|x-y| \\ &> x-\delta \\ &\geq x-\frac{x}{2} \\ &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

und ferner

$$\begin{aligned} |g(y)-g(x)| &= \frac{|x-y|}{xy} \\ &< \frac{\delta}{x\frac{x}{2}} \\ &\leq \frac{\varepsilon\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass δ nicht nur von ε sondern auch von x abhängt. Insbesondere muss (unser) δ immer kleiner gewählt werden, wenn x klein wird.

1.1.32 Definition: Sei $M\subset\mathbb{R}$. Eine Funktion $f: M\to\mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig auf** M, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ (das von ε, aber *nicht von* x abhängen darf), so dass für alle $x\in M$ gilt: Ist $y\in M$ und $|y-x|<\delta$ dann gilt $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

1.1.33 Beispiele:

1. $f:\ (0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. f ist gleichmäßig stetig auf $(0,1)$.
   Das haben wir gerade bewiesen, denn die Wahl von δ in (1.18) war unabhängig von $x\in\ (0,1)$.
2. $g:\ (0,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x}$. g ist nicht gleichmäßig stetig auf $(0,1)$.
   Unsere Wahl von δ in (1.19) hing (stark) von x ab. Es könnte natürlich sein, dass es eine clevere Wahl von δ gibt, die unabhängig von x ist. Dies ist jedoch nicht der Fall. Angenommen, wir hätten zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ gefunden, so dass: Aus $|y-x|<\delta$ folgt $|g(y)-g(x)|<\varepsilon$ für alle $x,y\in\ (0,1)$.
   Wir wählen $x=\frac{1}{n}$ und $y=\frac{1}{2n}$, dann ist $|y-x|=\frac{1}{2n}<\delta$ falls n groß genug ist.
   Aber $|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}|=n>\varepsilon$ für große n. Dies ist ein Widerspruch.

1.1.34 Aufgabe: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = x^2. \tag{1.20}$$

Ist f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?

In unserem Beispiel 2 in 1.1.31 machte der linke Rand von $(0, 1)$ die gleichmäßige Stetigkeit „kaputt". Die Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ ist für alle $x > 0$ stetig, aber die Stetigkeit wird für kleine x „immer schlechter", d. h. für festes $\varepsilon > 0$ musste $\delta(\varepsilon, x)$ immer kleiner gewählt werden, wenn x kleiner wird.
Mit anderen Worten: Die Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ wird immer steiler, wenn x gegen Null geht.

Der folgende zentrale Satz zeigt, dass Hindernisse für die Gleichmäßigkeit der Stetigkeit nur vom Rand kommen können:

1.1.35 Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, dann ist f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

1.1.36 Bemerkungen:

1. Es ist entscheidend, dass das Intervall $[a, b]$ **abgeschlossen** ist. Wir haben bereits gesehen (Beispiel 2 in 1.1.31), dass der Satz für offene Intervalle nicht gilt.
2. Weiterhin ist entscheidend, dass das Intervall $[a, b]$ **beschränkt** ist. Wir haben gesehen (Aufgabe 1.1.34), dass der Satz auf $\mathbb{R}$ ebenfalls nicht gilt.
3. Im Satz kann das Intervall durch eine beliebige **abgeschlossene** und **beschränkte** Menge M ersetzt werden. Tatsächlich gilt der folgende Beweis auch für diesen Fall. (Siehe auch Kapitel 2.)
4. Satz 1.1.17 folgt direkt aus Satz 1.1.35 und Definition 1.1.32.

Beweis (Satz 1.1.35): Wir führen einen Widerspruchsbeweis.
Angenommen, die Funktion f ist nicht gleichmäßig stetig.
Es ist also FALSCH, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|y - x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Das heißt: (durch Negation von Quantoren)
Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0 \quad x, y \in [a, b]$ existieren mit

$$|y - x| < \delta\,, \quad \text{aber} \quad |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon\,.$$

Sei ein solches $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Wir können dann $\delta = \frac{1}{n}$ wählen und $x_n, y_n \in [a,b]$ mit

$$|y_n - x_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad |f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon\,. \tag{1.21}$$

x_n ist eine Folge mit Werten in $[a,b]$. Weil $[a,b]$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge x_{n_j} von x_n, die konvergiert, etwa $x_{n_j} \to x_0$. Weil $[a,b]$ abgeschlossen ist, gehört x_0, der Limes von x_{n_j} zu $[a,b]$. Die Folge y_{n_j} konvergiert ebenfalls gegen x_0, denn

$$|y_{n_j} - x_0| \;\leq\; |y_{n_j} - x_{n_j}| + |x_{n_j} - x_0| \;\leq\; \frac{1}{n_j} + |x_{n_j} - x_0| \to 0\,.$$

Nach Voraussetzung ist f in $[a,b]$ stetig, also insbesondere stetig in $x_0 \in [a,b]$. Da die Folgen x_{n_j} und y_{n_j} gegen x_0 konvergieren, folgt aus der Stetigkeit von f, dass

$$f(x_{n_j}) \to f(x_0) \quad \text{und} \quad f(y_{n_j}) \to f(x_0)$$

gilt.

Ist also n_j groß genug, dann gilt

$$|f(x_{n_j}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{und} \qquad |f(y_{n_j} - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Aber dann würde folgen

$$\begin{aligned} \Big|f(y_{n_j}) - f(x_{n_j})\Big| &= \Big|\Big(f(y_{n_j}) - f(x_0)\Big) + \Big(f(x_0) - f(x_{n_j})\Big)\Big| \\ &\leq \Big|f(y_{n_j}) - f(x_0)\Big| + \Big|f(x_0) - f(x_{n_j})\Big| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

und dies steht im Widerspruch zu (1.21). □