

Seminar „Angewandte Stochastik“ im WS 2023/24

Kursnummer: 01112

Allgemeine Hinweise

- In der Themenliste unten finden Sie neben der Hauptliteratur jeweils auch Zusatzmaterial mit Vorschlägen für alternative und ergänzende Quellen mit zusätzlichen Beispielen oder Bildern. Weitere Quellen zum „Weiterlesen“ sind zum Beispiel in Kapitel 14 von [Häg02] angegeben.
- Bei Bedarf können Grundlagen zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Maßtheorie in Kapitel 6 von [Nor97] und Kapitel 1 von [Häg02] nachgeschlagen werden. Detailliertere Erklärungen findet man beispielsweise bei [Kle06].

Themen

TOPIC 1: Diskrete Markovketten

Stichworte: Definition, Markoveigenschaft, Übergangswahrscheinlichkeiten, kommunizierende Zustände/Klassen, verschiedene Beispiele

Hauptquelle: Abschnitte 1.1–1.2 aus [Nor97]

Weitere Quellen: Kapitel 1 & 2 von [Häg02], Abschnitt 17.2 von [Kle06], Abschnitt 1.1 von [MT93]

TOPIC 2: Irreduzible & aperiodische Markovketten

Stichworte: diskrete Markovketten, kommunizierende Zustände/Klassen, verschiedene Beispiele für Markovketten, die irreduzibel/aperiodisch sind bzw. nicht sind

Hauptquelle: Abschnitt 1.3 aus [LP17], Kapitel 4 von [Häg02]

Weitere Quellen: Abschnitt 1.2 und der Anfang von 1.8 [Nor97], Abschnitt 1.7 von [LP17], Aufgaben zu Kapitel 4 von [Häg02] (z.B. Schach), Kapitel 5 von [Häg02]

TOPIC 3: Treffen, Stoppen und die starke Markoveigenschaft

Stichworte: Stoppzeiten, Trefferzeiten, Absorption, die starke Markov-Eigenschaft, Birth-death-chain, Gambler's ruin

Hauptquelle: 1.3 und 1.4 von [Nor97]

Weitere Quellen: 3.4.3 von [MT93] und A.3 von [LP17]

TOPIC 4: Rekurrenz & Transienz von Markovketten

Stichworte: Rekurrenz und Transienz, Trefferzeiten, Exkursionen, Anzahl der Besuche in einem Zustand, Zustandsklassen

Hauptquelle: 1.5 von [Nor97]

Weitere Quellen: Kapitel 8 von [MT93] (insbesondere 8.1), Kapitel 21 von [LP17]

TOPIC 5: Rekurrenz & Transienz der Irrfahrt

Stichworte: Irrfahrten (random walks) in \mathbb{Z}^d , die Fälle $d \leq 2$ und $d > 2$, Satz von Pólya, Rekurrenz und Transienz

Hauptquelle: Abschnitt 1.6 von [Nor97]

Weitere Quellen: Abschnitt 1.5 von [Nor97] Abschnitt 17.5 von [Kle06]

TOPIC 6: Invariante Verteilungen und das Ehrenfest-Urnenmodell

Stichworte: Invariante bzw. stationäre Verteilungen, Ehrenfest-Urnenmodell, andere Beispiele

Hauptquelle: Abschnitt 1.7 [Nor97], 2.3 von [LP17]

Weitere Quellen: Abschnitt 1.5 von [Nor97], Abschnitte 1.5.1–1.5.3 von [LP17], Kapitel 4 & 5 aus [Häg02]

TOPIC 7: Konvergenz zum Equilibrium

Stichworte: Existenz und Eindeutigkeit stationärer Verteilungen, Totalvariationsabstand, Coupling, Konvergenzssatz

Hauptquelle: Abschnitt 1.8 [Nor97]

Weitere Quellen: Abschnitte 1.5, 1.7 von [Nor97], Kapitel 5 aus [Häg02] (insbesondere auch Aufgaben), Abschnitte 1.5 und 4.3 von [LP17], Abschnitt 18.2 von [Kle06]

TOPIC 8: Reversible Markovketten

Stichworte: Reversible Markovketten, reversible Verteilungen, Birth-death-chain, Irrfahrten auf Graphen, Zeitumkehr

Hauptquelle: Abschnitt 1.9 aus [Nor97], Kapitel 6 aus [Häg02]

Weitere Quellen: Abschnitte 1.6 und 2.5 von [LP17], 19.2 von [Kle06]

TOPIC 9: Computersimulation von Zufallszahlen und Markovketten

Stichworte: ‘random mapping’ Darstellung, update-Funktion, Generierung pseudo-zufälliger Zahlen, Simulation von Markovketten

Hauptquelle: Kapitel 3 aus [Häg02], Abschnitt 1.2 und Appendix B von [LP17]

Weitere Quellen: Aufgaben zu Kapitel 3 aus [Häg02], insbesondere 3.7

TOPIC 10: Markovketten-Monte-Carlo

Stichworte: Hard-Core model, Gibbs sampler, Metropolis chain

Hauptquelle: Kapitel 7 aus [Häg02]

Weitere Quellen: Aufgaben auf Kapitel 7 von [Häg02] (insbesondere 7.2), Kapitel 3 aus [LP17], Abschnitt 5.5 aus [Nor97], Abschnitt 18.3 von [Kle06]

TOPIC 11: MCMC für das q -Färbungsproblem

Stichworte: Konvergenzgeschwindigkeit, Färbung von Graphen, Coupling, Glauber bzw. Gibbs sampler

Hauptquelle: Kapitel 8 aus [Häg02]

Weitere Quellen: Kapitel 3 und Abschnitt 14.3 [LP17]

TOPIC 12: „Schnelles Zählen“ mit Markovketten

Stichworte: Zählprobleme, q -Färbungsproblem, MCMC, Polynomialzeit-Algorithmen, randomisierte Approximation, Gibbs sampler

Hauptquelle: Kapitel 9 aus [Häg02]

Weitere Quellen: Kapitel 3 und Abschnitt 14.4 aus [LP17], Kapitel 8 aus [Häg02]

TOPIC 13: Der Simulated-Annealing-Algorithmus

Stichworte: Handelsreisenden-Problem, Optimierung mit MCMC, Boltzmann-Verteilung, NP-vollständige Probleme, Metropolis chain

Hauptquelle: Kapitel 13 aus [Häg02]

Weitere Quellen: [KGV83]

TOPIC 14: A coupling from the past: Der Propp-Wilson-Algorithmus

Stichworte: ‘exakte’ Stichproben aus der Gleichgewichtsverteilung, Coupling-Methode, MCMC

Hauptquelle: Kapitel 10 [Häg02]

Weitere Quellen: Kapitel 12 aus [Häg02], Kapitel 25 von [LP17], Abschnitt 18.3 von [Kle06]

TOPIC 15: Markov-Entscheidungsprozesse

Stichworte: Optimierungsprobleme, Kosten-/Wertefunktion, (stationäre) Strategien, Policy-improvement(-Algorithmus)

Hauptquelle: Abschnitt 5.4 [Nor97]

Weitere Quellen: Kapitel 17 von [MRT18]

TOPIC 16: Googles PageRank-Algorithmus

Stichworte: Webseitensortierung, gewichtete Graphen, iterativer Algorithmus, stationäre Verteilungen, Google Matrix, Rankings, zufälliges Surfen

Hauptquelle: Kapitel 4 & 5 von [LM12]

Weitere Quellen: Kapitel 6 von [LM12], [Pag⁺98], ggf. Abschnitte 1.7 und 1.8 von [Nor97]

TOPIC 17: Markovketten in der Biologie

Stichworte: Galton-Watson-Tree, Wright-Fisher-Modell, Moran-Modell als Beispiele für Markovketten und ihre Eigenschaften

Hauptquelle: Abschnitt 5.1 [Nor97] (ohne 5.1.2)

Weitere Quellen: Kapitel 1 von [Nor97], Kapitel 17 von [Kle06] (insbesondere Beispiele 17.20–17.22)

TOPIC 18: Elektrische Netzwerke

Stichworte: Kirchhoff’sches Gesetz, Ohm’sches Gesetz, Irrfahrt, reversible Markovketten, Ersteintrittszeiten, Rekurrenz und Transienz

Hauptquelle: 19.3 und 19.4 von [Kle06]

Weitere Quellen: Abschnitte 1.1.– 1.3 von [DS84], zum Nachschlagen auch Kapitel 1 von [Nor97]

Literatur

- [KGV83] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt und M.P. Vecchi. “Optimization by Simulated Annealing”. In: *Science* 220 (1983).
- [DS84] P.G. Doyle und J.L. Snell. *Random Walks and Electric Networks*. The Carus Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1984.
- [MT93] S.P. Meyn und R.L. Tweedie. *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer London, 1993.
- [Nor97] J. R. Norris. *Markov Chains*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [Pag⁺98] L. Page, S. Brin, R. Motwani und T. Winograd. *The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web*. Techn. Ber. Stanford Digital Library Technologies Project, 1998.
- [Häg02] O. Häggström. *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2002.
- [Kle06] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 2006.
- [LM12] A.N. Langville und C.D. Meyer. *Google’s PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*. Princeton University Press, 2012.
- [LP17] D.A. Levin und Y. Peres. *Markov Chains and Mixing Times*. 2. Aufl. Springer London, 2017.
- [MRT18] M. Mohri, A. Rostamizadeh und A. Talwalkar. *Foundations of Machine Learning*. 2. Aufl. Adaptive computation and machine learning series. The MIT Press, 2018. URL: <https://cs.nyu.edu/~mohri/mlbook/>.
- [SB18] R.S. Sutton und A.G. Barto. *Reinforcement Learning – An Introduction*. 2. Aufl. Adaptive Computation and Machine Learning. The MIT Press, 2018.