Aufgabe B0104 Grenzwert einer Folge

Gesucht sind die Grenzwerte unterstehender Folgen mit $n \in \mathbb{N}$. Handelt es sich hierbei um konvergente oder divergente Folgen?

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{5}{n^3}$

b) $a_n = \dfrac{3n^4+5}{2n-6n}$

c) $a_n = \dfrac{4n^2+3n-2}{6n^2+5}$

d) $a_n = e^{x \cdot n}$ für $x \in \mathbb{R}$

e) $a_n = \dfrac{3n}{\sqrt{5n}}$

Aufgabe B0104 (Lösungshinweise)

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{5}{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1^n}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^3} = 0$$

Die Folge ist konvergent.

b) $a_n = \dfrac{3n^4+5}{2n-6n}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+5}{2n-6n} && \mid \text{Zähler und Nenner durch } n \text{ teilen} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+{}^5\!/_n}{2-6} = -\infty \end{aligned}$$

Die Folge ist divergent.

c) $a_n = \dfrac{4n^2+3n-2}{6n^2+5}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n-2}{6n^2+5} && \mid \text{Zähler und Nenner durch } n^2 \text{ teilen} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4+{}^3\!/_n-{}^2\!/_{n^2}}{6+{}^5\!/_{n^2}} \\ &= \frac{4+0-0}{6-0} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Die Folge ist konvergent.

d) Für die Folge mit $a_n = e^{x \cdot n}$ ist eine Fallunterscheidung bezüglich x hilfreich:

$$x > 0 : \lim_{n\to\infty} e^{x\cdot n} = \infty \qquad \text{(divergent, da } x \cdot n > 0\text{)}$$

$$x = 0 : \lim_{n\to\infty} e^{0\cdot n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad \text{(konvergent)}$$

$$x < 0 : \lim_{n\to\infty} e^{x\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^x\right)^n = 0 \quad \text{(konvergent, da in diesem Fall } |e^x| < 1\text{)}$$

Die Folge ist für $x > 0$ divergent, für $x \leq 0$ konvergent.

e) $a_n = \dfrac{3n}{\sqrt{5n}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n}{\sqrt{5 \cdot n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{n} = \infty$$

Die Folge ist divergent.

$\checkmark$