

Aufgabe B0211

Lokales Optimum

Ein Monopolist stellt ein Produkt her, für das folgende Preisabsatzfunktion

$p(x) = 3,5 - 0,2x$ GE/ME gegeben ist. Die Kostenfunktion für dieses Produkt lautet:
 $K(x) = 0,75x + 1,325$ GE. Hierbei bezeichnet x ($x \geq 0$) die herzustellende Menge des Produktes in Mengeneinheiten [ME]; 1 ME entspricht 1 000 Stück und 1 GE entspricht 10 000 €.

- Bei welcher Absatzmenge (in Stück) beträgt der Erlös 125 000 €?
- Bestimmen Sie die erlösmaximale Absatzmenge in Stück. Wie groß ist der maximale Erlös in Euro?
- Berechnen Sie den maximalen Gewinn in Euro. Bei welcher Absatzmenge (Stückzahl) wird dieser Gewinn erreicht?
- Bestimmen Sie die Nullstellen der Gewinnfunktion. Interpretieren Sie diese Stellen!

Aufgabe B0211 (Lösungshinweise)

- a) Die Erlösfunktion ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} E(x) &= p(x) \cdot x \\ &= (3,5 - 0,2x) \cdot x = 3,5x - 0,2x^2 \text{ [GE]} \end{aligned}$$

Die Erlöse von 125 000 Euro entsprechen $125000 : 10000 = 12,5$ GE.

$$3,5x - 0,2x^2 = 12,5 \iff x_1 = 5 \quad x_2 = 12,5.$$

Um die Absatzmenge in Stück zu berechnen, werden die ermittelten x -Werte mit 1 000 multipliziert. Bei einer Absatzmenge von $5 \cdot 1000 = 5000$ Stück bzw. $12,5 \cdot 1000 = 12500$ Stück beträgt der Erlös 125 000 €.

- b) Es ist das lokale Optimum der Erlösfunktion zu bestimmen:

$$E'(x) = 3,5 - 0,4x = 0 \iff x_0 = 8,75 \text{ [ME]}$$

$$E''(x) = -0,4 = E''(8,75) < 0, \text{ d.h. lokales Maximum bei } 8,75 \text{ ME.}$$

Bei einer Verkaufsmenge von $8,75 \cdot 1000 = 8750$ Stück erzielt das Unternehmen die größten Erlöse von $E(8,75) = 15,3125$ GE, d.h. $15,3125 \cdot 10000 = 153125$ €.

- c) Die Gewinnfunktion lautet:

$$G(x) = E(x) - K(x) = 3,5x - 0,2x^2 - (0,75x + 1,325) = 2,75x - 0,2x^2 - 1,325$$

$$G'(x) = -0,4x + 2,75 = 0 \iff x_0 = 6,875$$

$$G''(x) = -0,4 = G''(6,875) < 0 \text{ d.h. lokales Maximum bei } 6,875 \text{ ME.}$$

Bei einer Verkaufsmenge von $6,875 \cdot 1000 = 6875$ Stück erreicht das Unternehmen den maximalen Gewinn von $G(6,875) = 8,128125$ GE, d.h. $8,128125 \cdot 10000 = 81281,25$ €.

d) $G(x) = 2,75x - 0,2x^2 - 1,325 = 0 \iff x_1 = 0,5 \quad x_2 = 13,25$

Da es sich bei der Gewinnfunktion um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, stellt der kleinere Wert die Gewinnschwelle dar, der größere die Gewinngrenze. Die Gewinnschwelle wird demnach bei 500 Stück erreicht, die Gewinngrenze bei 13 250 Stück.