

**Aufgabe B0212**

Globales Optimum unter Restriktionen

In einem Betrieb ist der Kraftstoffverbrauch einer Maschine von deren Leistung  $d$  abhängig. Die Leistung kann von 20 Stück je Stunde bis zu 100 Stück je Stunde angepasst werden. Die Maschine steht insgesamt 40 Stunden in einer Woche zur Verfügung. Bei der Herstellung des Produktes lässt sich der Kraftstoffverbrauch durch eine Verbrauchsfunktion  $v$  messen (in Liter je Stück):  $v(d) = 1,4d^2 - 196d + 8000$ .

- a) Geben Sie das Optimierungsproblem zur Bestimmung der verbrauchsoptimalen Leistung an.  
Mit welcher Leistung soll der Betrieb das Endprodukt herstellen?  
Wie hoch ist der Verbrauch an Kraftstoff bei dieser Leistung?  
Wie viele Stück lassen sich mit dieser Leistung pro Woche höchstens herstellen?
- b) Aufgrund einer neuen Lärmschutzverordnung ist die Leistung der Maschine auf höchstens 60 Stück je Stunde zu drosseln. Wie verändern sich die Lösungen unter a)?

**Aufgabe B0212 (Lösungshinweise)**

- a) Es ist das folgende Optimierungsproblem zu lösen:

$$\min \{1,4d^2 - 196d + 8000 \mid 20 \leq d \leq 100\}$$

1. Bestimmung des lokalen Optimums der Verbrauchsfunktion:

$$v(d) = 1,4d^2 - 196d + 8000$$

$$v'(d) = 2,8d - 196 = 0 \iff d_0 = 70$$

$$v''(d) = 2,8$$

$$v''(70) = 2,8 > 0, \text{ d.h. lokales Minimum bei } d_0 = 70, v(70) = 1\,140 \text{ [ℓ/Stück]}$$

2. Überprüfung des relativen Minimums auf Zulässigkeit:

$$20 \leq d_0 \leq 100, \text{ d.h. } d_0 = 70 \in \widehat{D}_v; \text{ lokales Minimum ist zulässig;}$$

3. da Funktion  $v$  auf  $\widehat{D}_v$  streng konvex, keine Überprüfung der Ränder notwendig;

4. globales Minimum bei  $d_0 = 70$  [Stück/Std]

Der Betrieb sollte das Endprodukt mit einer Leistung von  $d_0 = 70$  Stück/Std herstellen.

Der Verbrauch an Kraftstoff beträgt bei der optimalen Leistung  $v(70) = 1\,140$  ℓ/Stück.

Es lassen sich mit einer Leistung von  $d_0 = 70$  Stück/Std pro Woche  $70 \cdot 40 = 2\,800$

Stück herstellen.

- b) Der Definitionsbereich  $\widehat{D}_v$  wurde durch die Lärmschutzverordnung auf 60 Stück pro Stunde eingeschränkt. Dies führt zu folgendem Optimierungsproblem:

$$\max \{1,4d^2 - 196d + 8000 \mid 20 \leq d \leq 60\}$$

In Teilaufgabe a) wurde das lokale Minimum bei  $d_0 = 70$  Stück/Std bestimmt. Dieses Minimum ist nach der zusätzlichen Einschränkung nicht mehr zu erreichen. Deshalb werden (im 3. Schritt) die neuen Ränder der Verbrauchsfunktion untersucht:  $\underline{d} = 20$ ;  $v(20) = 4\,640$  [ℓ/Stück] und  $\bar{d} = 60$ ;  $v(60) = 1\,280$  [ℓ/Stück]. Durch die Lärmschutzverordnung liegt das globale Minimum jetzt bei  $\bar{d} = 60$  Stück/Std, so dass der Verbrauch auf 1 280 ℓ/Stück steigt und nur noch  $60 \cdot 40 = 2\,400$  Stück herstellbar sind.

