Aufgabe B0214 Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für folgende Funktion durch:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

Aufgabe B0214 (Lösungshinweise)

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ wird allgemein diskutiert:

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$;

Nullstellen:
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} = 0$$
$$\iff x - 1 = 0$$
$$\iff x_N = 1$$

Symmetrie: keine Achsen- bzw. Punktsymmetrie, da $f(x) \neq f(-x)$ und $-f(x) \neq f(-x)$ gilt.

Asymptoten:
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x} = 0 = \lim_{x\to\infty} f(x)$$
Funktion hat eine waagrechte Asymptote $y = 0$

lokale Optima:
$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = 0$$
$$\iff -x^2+2x+1 = 0$$
$$\iff x_{01} = -0{,}414 \qquad x_{02} = 1+\sqrt{2} \approx 2{,}414$$
$$f''(x) = \frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$
$f''(-0{,}414) > 0$, d.h. lokales Minimum bei x_{01}, $f(x_{01}) = -1{,}207$;

$f''(2{,}414) < 0$, d.h. lokales Maximum bei x_{02}, $f(x_{02}) = 0{,}207$;

globale Optima: Es gilt: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

f hat ein globales Minimum bei $x_{01} = -0{,}414$ und ein globales Maximum bei $x_{02} = 2{,}414$;

Wendepunkte:
$$f''(x) = \frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3} = 0 \qquad f'''(x) \neq 0$$
$$\iff 2x^3-6x^2-6x+2 = 0$$

$$\iff x_{w1} = -1 \quad x_{w2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268 \quad x_{w3} = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}732$$

$$f'''(x) = \frac{6(-x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4x - 1)}{(x^2+1)^4}$$

$f'''(x_{w1}) \neq 0$, $f'''(x_{w2}) \neq 0$, $f'''(x_{w3}) \neq 0$, f hat drei Wendepunkte;

Monotonie: $f'(x) \geq 0$: f monoton steigend für $-0{,}414 \leq x \leq 2{,}414$;

$f'(x) \leq 0$: f monoton fallend für $x \leq -0{,}414$ oder $x \geq 2{,}414$;

Krümmung: $f''(x) \geq 0$: f konvex für $-1 \leq x \leq 0{,}268$ oder $x \geq 3{,}732$;

$f''(x) \leq 0$: f konkav für $x \leq -1$ oder für $0{,}2679 \leq x \leq 3{,}732$