Aufgabe B0505 Matrizen

Bestimmen Sie wahre Aussagen für die Vektoren $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

A) $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind orthogonal.

B) Die Dreiecksungleichung ist genau erfüllt.

C) $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind linear unabhängig.

D) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 1{,}5$

E) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Aufgabe B0505 (Lösungshinweise)

A) Das Skalarprodukt ist $\boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{b} = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$

B) Die Dreiecksungleichung für die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ lautet:

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$$

Damit die Dreiecksungleichung genau erfüllt ist, muss gelten: $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{1{,}5^2 + (-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{6{,}75} \approx 2{,}5981$$

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} + \sqrt{(1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-1/2)^2} \\
&= \sqrt{6} + \sqrt{0{,}75} \approx 3{,}3156
\end{aligned}$$

Daher gilt: $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| = 2{,}5981 < 3{,}3156 = \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$.
Die Dreiecksungleichung ist damit nicht genau erfüllt!

C) Es gibt kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.
Es ergibt sich die Linearkombination:

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = 0,$$

die sich als Gleichungssystem formulieren lässt:

$$\begin{aligned}
&I. && \lambda_1 + 0{,}5\lambda_2 = 0 \\
&II. && -\lambda_1 - 0{,}5\lambda_2 = 0 \\
&III. && 2\lambda_1 - 0{,}5\lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Umstellung der Gleichung III. nach λ_1 ergibt:

$$\begin{aligned}
2\lambda_1 &= 0{,}5\lambda_2 \\
\lambda_1 &= 0{,}25\lambda_2
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\lambda_1 = 0{,}25\lambda_2$ in Gleichungen I. und II.:

$$\begin{aligned}
&I. && 0{,}25\lambda_2 + 0{,}5\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\
&II. && -0{,}25\lambda_2 - 0{,}5\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $\lambda_1 = 0{,}25 \cdot 0 = 0$. Es gibt keine weitere Lösung als $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$. Die beiden Spaltenvektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind linear unabhängig.

D) Die Addition der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ergibt:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

E) Die Subtraktion der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ergibt:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

<u>Die Aussagen B) und D) sind nicht wahr.</u>

<u>Die Aussagen A), C) und E) sind wahr.</u>