## Aufgabe 1-1-1

Gegeben sei der Digraph $\vec{G}$ in Abbildung 1.

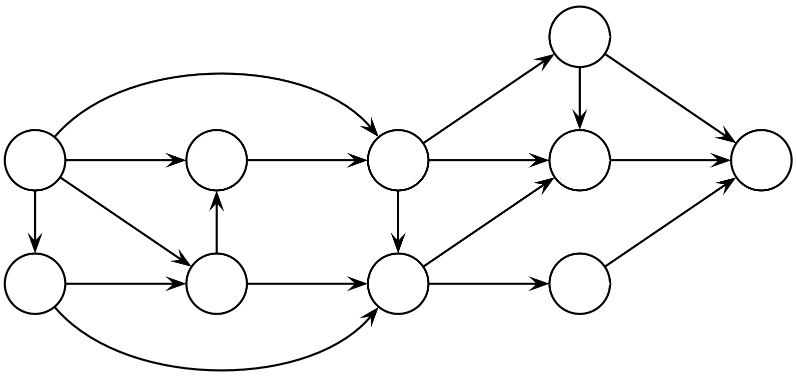

Abbildung 1: Digraph $\vec{G}$, ohne Knotennummerierung

a) Geben Sie eine topologische Sortierung der Knoten von $\vec{G}$ an.

b) Wie viele verschiedene topologische Sortierungen der Knoten von $\vec{G}$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Stellen Sie die Adjazenzmatrix $A(\vec{G})$ und die Inzidenzmatrix $B(\vec{G})$ auf. Bezeichnen Sie die Pfeile zwischen den Knoten $i$ und $j$ mit $\langle i, j\rangle$; alternativ nummerieren Sie die Pfeile und benennen diese mit $e_k$ $(k = 1, \ldots, 20)$.

d) Notieren Sie alle starken Zusammenhangskomponenten.

  

## Lösungshinweise

a)

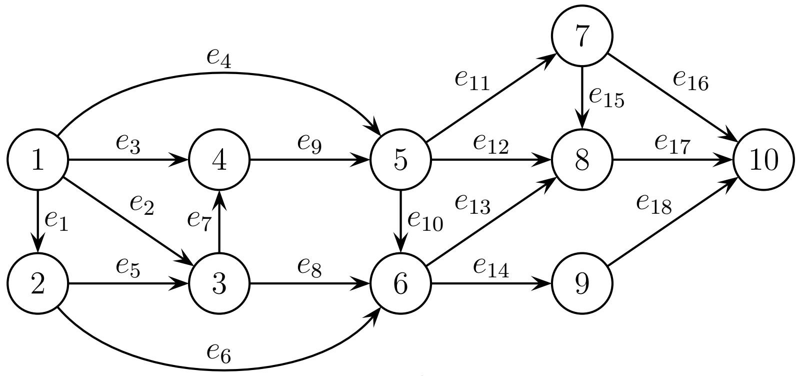


Abbildung 2: Digraph $\vec{G}$, topologisch sortiert

b) Es gibt genau 5 verschiedene topologische Sortierungen der Knoten von $\vec{G}$. Bei jeder topologischen Sortierung ist die Nummerierung der Knoten 1 - 5 eindeutig festgelegt; jede Änderung verletzt die Bedingungen an eine topologische Sortierung. Auf der Basis der Knotennummerierung aus Teil a) sind die in Abbildung 3 angegebenen fünf Reihenfolgen möglich.

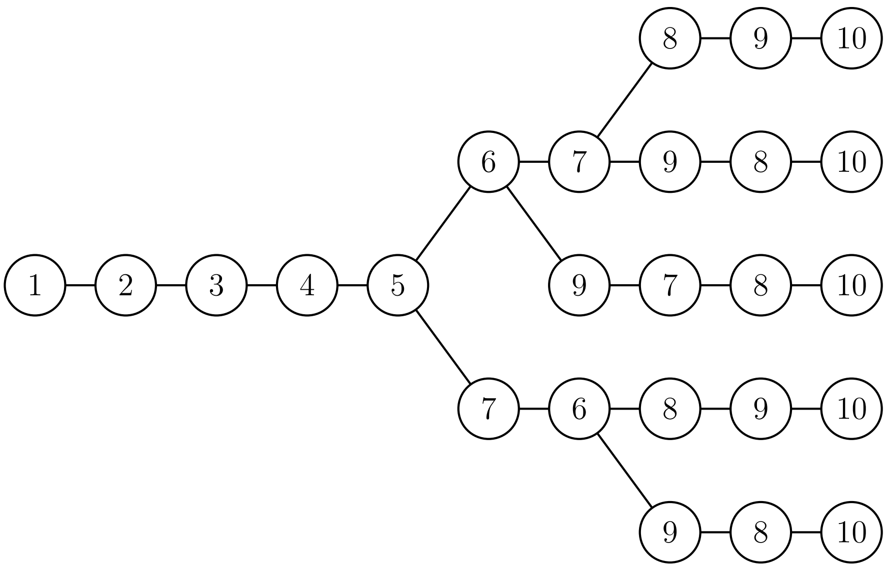

Abbildung 3: Reihenfolgen für eine topologische Sortierung der Knoten in $\vec{G}$

c)

$$A(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Ein topologisch sortierbarer Digraph besitzt keine Zyklen und somit ist jeder Knoten für sich eine starke Zusammenhangskomponente.

---

  