Aufgabe 1-3-1

Gegeben sei ein bewerteter, ungerichteter Graph $G = [V, E; c]$
mit $V = \{1, \ldots, 5\}$. Die Entfernungen zwischen den Knoten werden durch folgende symmetrische Entfernungsmatrix bestimmt (Erinnerung: ∞ bedeutet, es gibt keine Kante.)

$$D(G) := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & 1 & 2 & 0 & 3 \\ \infty & 5 & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeichnen Sie den Graph G.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Tripel-Algorithmus die kürzesten Entfernungen zwischen allen Knoten.

Lösungshinweise

a)

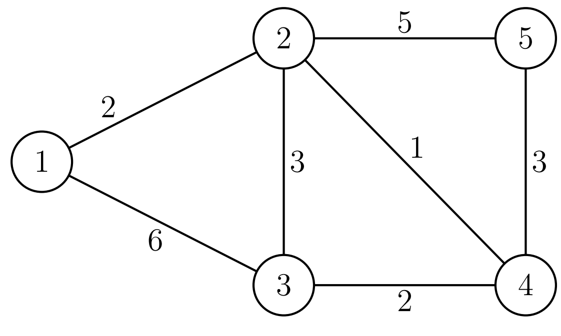

Abbildung 1: Graph G

b) Wir starten den Tripel-Algorithmus mit $D^{(1)} = D$; $Q^{(1)}$ gibt die Vorgängerknoten an. Die für die Tripel-Operation benötigten Spalten ν und Zeilen ν in den Matrizen $D^{(\nu)}$ sind jeweils eingerahmt. Gilt $d_{\nu j}^{(\nu)} + d_{i\nu}^{(\nu)} < d_{ij}^{(\nu)}$, so ist das Element $d_{ij}^{(\nu)}$ mit $\rhd$ markiert. In $D^{(1)}$ trifft diese Bedingung für kein Element $d_{ij}^{(1)}$ zu.

$$D^{(1)} = \left[\begin{array}{c|cccc} \hline 0 & 2 & 6 & \infty & \infty \\ \hline 2 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & 1 & 2 & 0 & 3 \\ \infty & 5 & \infty & 3 & 0 \end{array}\right] \qquad Q^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Der Tripel-Algorithmus wird nun wie folgt fortgesetzt.

$$D^{(2)} = \left[\begin{array}{c|c|ccc} 0 & 2 & \rhd\, 6 & \rhd\, \infty & \rhd\, \infty \\ \hline 2 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ \hline \rhd\, 6 & 3 & 0 & 2 & \rhd\, \infty \\ \rhd\, \infty & 1 & 2 & 0 & 3 \\ \rhd\, \infty & 5 & \rhd\, \infty & 3 & 0 \end{array}\right] \qquad Q^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Im nachfolgenden Schritt $\nu + 1$ wird das veränderte $d_{ij}^{(\nu+1)}$ fett hervorgehoben.

$$D^{(3)} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 2 & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ \hline \mathbf{5} & 3 & 0 & 2 & \mathbf{8} \\ \hline \mathbf{3} & 1 & 2 & 0 & 3 \\ \mathbf{7} & 5 & \mathbf{8} & 3 & 0 \end{array}\right] \qquad Q^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \mathbf{2} & 3 & 3 & 3 & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \mathbf{2} & 5 & \mathbf{2} & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D^{(4)} = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 2 & 5 & 3 & \rhd 7 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & \rhd 5 \\ 5 & 3 & 0 & 2 & \rhd 8 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline \rhd 7 & \rhd 5 & \rhd 8 & 3 & 0 \end{array}\right] \qquad Q^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D^{(5)} = \left[\begin{array}{cccc|c|} 0 & 2 & 5 & 3 & \mathbf{6} \\ 2 & 0 & 3 & 1 & \mathbf{4} \\ 5 & 3 & 0 & 2 & \mathbf{5} \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 3 & 0 \\ \hline \end{array}\right] \qquad Q^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & \mathbf{4} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \mathbf{4} \\ 2 & 3 & 3 & 3 & \mathbf{4} \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$D^{(6)}$ und $Q^{(6)}$ stimmen mit $D^{(5)}$ und $Q^{(5)}$ überein.

In der Matrix $D^{(6)}$ können nun alle kürzesten Entfernungen abgelesen werden. Bspw. ist $d_{35}^{(6)} = 5$, d.h. der Weg von Knoten 3 zu Knoten 5 hat die Länge 5. $Q^{(6)}$ enthält die Information über den genauen Verlauf des Weges. Betrachtet wird die Zeile 3; $q_{35}^{(6)} = 4$ besagt, dass der Vorgänger von Knoten 5 Knoten 4 ist. Für den Weg von 3 nach 4 benötigen wir $q_{34}^{(6)}$. Hier steht eine 3, was bedeutet, dass der Ausgangspunkt erreicht und somit $[3, 4, 5]$ mit Länge 5 als kürzester Weg von Knoten 3 zum Knoten 5 ermittelt ist.

Das sehr einfache Beispiel sollte erläutern, wie der Tripel-Algorithmus abläuft und wie die erforderlichen Informationen abgelesen werden können.
