
Aufgabe 1-3-2

Hagen Garbage ist Betreiber eines Entsorgungsunternehmens und beabsichtigt den Kauf einer neuen Sortiermaschine für Wertstoffe. Da die Betriebs- und Wartungskosten einer solchen Anlage aufgrund der Beanspruchung voraussichtlich in Abhängigkeit der Nutzungsdauer stark ansteigen werden, könnte es sinnvoll sein, diese nach einiger Zeit zu ersetzen.

Geplant wird bis zur Fertigstellung der Müllverbrennungsanlage für einen Zeitraum von vier Jahren. Die geschätzten Kosten c_{ij} (in Tsd. €) für den Kauf zu Beginn des Jahres i und Betrieb in den Jahren i bis $(j - 1)$ abzüglich eines Erlöses aus dem Wiederverkauf im Jahre j sind in [Tabelle 1](#) zusammengestellt. Insgesamt sollen die Gesamtkosten minimiert werden.

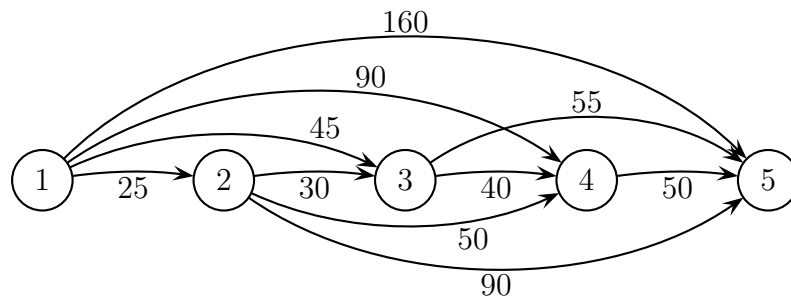
Tabelle 1: Kosten in Tsd. €

c_{ij}	2	3	4	5
1	25	45	90	160
2	–	30	50	90
3	–	–	40	55
4	–	–	–	50

- Formulieren Sie das gegebene Problem als Kürzeste-Wege-Problem, zeichnen Sie den zugehörigen gerichteten Graphen \vec{G} und erläutern die Bedeutung der Knoten sowie die Bewertung der Pfeile.
 - Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus. Sollte die gekaufte Sortieranlage zwischenzeitlich durch eine neue ersetzt werden und wie hoch sind die Gesamtkosten für die Dauer von vier Jahren?
-

Lösungshinweise

- a) Wird der Kauf der Sortieranlage als Kürzeste-Wege-Problem formuliert, so ist jeweils der Beginn der Jahre 1 bis 5 mit dem Knoten gleicher Nummer zu identifizieren. Diese werden dann vollständig mit allen Knoten höherer Nummer durch Pfeile verbunden; die Pfeilbewertungen entsprechen den Kosten für die zugehörige Nutzungsdauer. Es entsteht der gerichtete, bewertete Graph \vec{G} in [Abbildung 1](#).

Abbildung 1: Digraph $\vec{G} = \langle V, E; c \rangle$

- b) In [Tabelle 2](#) sind die vier Iterationen notiert. Die für die nächste Iteration ausgewählten Knoten sind jeweils mit * markiert. Die Mengen L und M sind mitgeführt und ebenfalls in die Tabelle eingetragen.

Tabelle 2: Iterationen zum Dijkstra-Algorithmus

Iteration Knoten j	1		2		3		4	
	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j
1	0		0		0		0	
2	25*	1	25	1	25	1	25	1
3	45	1	45*	1	45	1	45	1
4	90	1	75	2	75*	2	75	2
5	160	1	115	2	100	3	100	3
L	{1}		{1, 2}		{1, 2, 3}		{1, 2, 3, 4}	
M	{2, 3, 4, 5}		{3, 4, 5}		{4, 5}		{5}	

Knoten 5 stellt das Ende der Nutzungsdauer dar, ist also der Zielknoten. In [Tabelle 2](#) ist ablesbar, dass Gesamtkosten in Höhe von 100 Tsd. € entstehen und der kürzeste Weg über den Knoten 3 verläuft. Die gekaufte Sortieranlage sollte somit zu Beginn des 3. Jahres durch eine neue ersetzt werden.