Aufgabe 1-3-5

Unter einem Rechnernetz verstehen wir ein räumlich verteiltes System von Computern, Steuereinheiten und peripheren Geräten, die durch Datenübertragungseinrichtungen miteinander verbunden sind. In der betrieblichen Praxis treten immer häufiger Entscheidungsprobleme derart auf, unter bestimmten Gesichtspunkten eine optimale Rechnernetzarchitektur für ein zu konzipierendes Rechnernetz festzulegen. So auch bei der Abakus GmbH, die an einem neuen Standort ein PC-Netz installieren möchte, über das sechs Abteilungen miteinander kommunizieren sollen (siehe Abbildung 1).

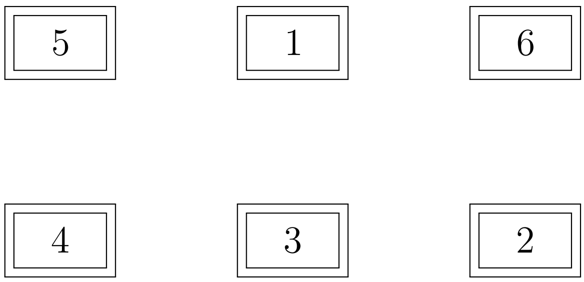

Abbildung 1: Abakus GmbH, zu vernetzende Abteilungen als Knotenmenge

Die einzelnen Abteilungen befinden sich in verschiedenen Gebäuden, und es müssen zusätzliche Glasfaserleitungen gezogen sowie weitere Vermittlungsrechner installiert werden, um die Übertragungssicherheit zu gewährleisten. Dies ist mit entsprechenden Kosten verbunden, die für eine direkte Verbindung zwischen PC Nr. i und PC Nr. j in Tabelle 1 zusammengefasst sind (Angaben in Tsd. €).

Tabelle 1: Kosten in Tsd. €

c_{ij}	PC 1	PC 2	PC 3	PC 4	PC 5	PC 6
PC 1	–	5	3	7	2	4
PC 2	5	–	2	6	5	3
PC 3	3	2	–	4	6	7
PC 4	7	6	4	–	3	2
PC 5	2	5	6	3	–	6
PC 6	4	3	7	2	6	–

Bestimmen Sie ausgehend vom Startknoten „PC 1“ mit dem Verfahren von Prim das entsprechende PC-Netz. Verfolgen Sie jede Alternative bis zum Ende und zeichnen Sie in einer Art Entscheidungsbaum, in welcher Reihenfolge die verschiedenen PCs ins Netz genommen werden. Welche Kosten verursachen die generierten Netze?

Lösungshinweise

In jedem Iterationsschritt wird dem bisherigen Baum eine Kante mit minimalen Kosten so hinzugefügt, dass sich wieder ein Baum ergibt. Die Graphik in Abbildung 2 stellt eine Art Entscheidungsbaum dar, dessen Knotennummerierung Auskunft über die Reihenfolge der Hinzunahme von Knoten gibt. Verzweigungen bedeuten Alternativen bei gleichen Kosten. Insgesamt ergeben sich die vier unten stehenden Gerüste, deren Kosten sich jeweils auf 12.000,– € belaufen.

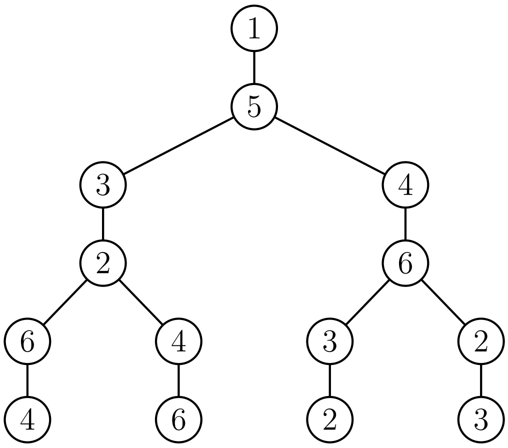

Abbildung 2: Alternativenbaum zu Gerüsten für Rechnernetze

Eingabedaten: $n = 6$;

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 7 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

$l = (-, 1, 1, 1, 1, 1)$; $b = (-, 5, 3, 7, 2, 4)$

$L := \{1\}$; $M := \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $I := \varnothing$

Schritt 2:

$k = 5$, da 2 Minimum

$L := \{1, 5\}$; $M := \{2, 3, 4, 6\}$; $I := \{[5, 1]\}$

Schritt 3: $(k = 5)$

$j = 2$: $c_{52} = 5 = 5 = b_2$

$j = 3$: $c_{53} = 6 > 3 = b_3$

$j = 4$: $c_{54} = 3 < 7 = b_4 \Rightarrow b_4 := 3$; $l_4 := 5$

$j = 6$: $c_{56} = 6 > 4 = b_6$

$\Rightarrow l = (-, 1, 1, 5, 1, 1)$; $b = (-, 5, 3, 3, 2, 4)$

Schritt 2:

$k = 3$, da 3 Minimum

$L := \{1, 5, 3\}$; $M := \{2, 4, 6\}$; $I := \{[5, 1], [3, 1]\}$

Schritt 3: $(k = 3)$

$j = 2$: $c_{32} = 2 < 5 = b_2 \Rightarrow b_2 := 2$; $l_2 := 3$

$j = 4$: $c_{34} = 4 > 3 = b_4$

$j = 6$: $c_{36} = 7 > 4 = b_6$

$\Rightarrow l = (-, 3, 1, 5, 1, 1)$; $b = (-, 2, 3, 3, 2, 4)$

Schritt 2:

$k = 2$, da 2 Minimum

$L := \{1, 5, 3, 2\}$; $M := \{4, 6\}$; $I := \{[5, 1], [3, 1], [2, 3]\}$

Schritt 3: $(k = 2)$

$j = 4$: $c_{24} = 6 > 3 = b_4$

$j = 6$: $c_{26} = 3 < 4 = b_6 \Rightarrow b_6 := 3$; $l_6 := 2$

$\Rightarrow l = (-, 3, 1, 5, 1, 2)$; $b = (-, 2, 3, 3, 2, 3)$

Schritt 2:

$k = 4$, da 3 Minimum

$L := \{1, 5, 3, 2, 4\}$; $M := \{6\}$; $I := \{[5, 1], [3, 1], [2, 3], [4, 5]\}$

Schritt 3: $(k = 4)$

$j = 6$: $c_{46} = 2 < 3 = b_6 \Rightarrow b_6 := 2$; $l_6 := 4$

$\Rightarrow l = (-, 3, 1, 5, 1, 4)$; $b = (-, 2, 3, 3, 2, 2)$

Schritt 2:

$k = 6$, da 2 einziges Element

$L := \{1, 5, 3, 2, 4, 6\}$; $M := \varnothing$; $I := \{[5, 1], [3, 1], [2, 3], [4, 5], [6, 4]\}$

Da nun $M = \varnothing$ ist,
bildet $I := \{[5, 1], [3, 1], [2, 3], [4, 5], [6, 4]\}$ ein **Minimalgerüst**.

