Aufgabe 1-3-6

Die Aufgabe stimmt mit Übungsaufgabe 3.3 in Einheit 1 des Moduls 31801 überein; die Lösungshinweise wurden ergänzt.

Bei Fertigungsmaschinen werden die jährlichen Betriebskosten mit wachsendem Alter in der Regel höher, bedingt durch höhere Kosten für Wartung und Instandhaltung. Diese Kosten können durch rechtzeitige Ersetzung der Maschine reduziert werden. Bei einer Ersetzung fallen andererseits Beschaffungskosten für eine neue Maschine an. Eine wichtige Aufgabe besteht deshalb darin, den Zeitpunkt der Ersetzung so festzulegen, dass die Gesamtkosten minimal werden. Wir betrachten ein solches »Erneuerungsproblem« für eine Maschine und einen Planungszeitraum von 5 Jahren. Seien C_i die Betriebskosten der Maschine während des i-ten Jahres in Betrieb, B_i die Beschaffungskosten für eine neue (identische) Maschine zu Beginn des Jahres i und S_i der Verkaufswert einer Maschine nach i Jahren Betriebsdauer.

a) Formulieren Sie das Problem, eine optimale Ersetzungspolitik für die Maschine zu bestimmen, als Aufgabe zur Ermittlung eines kürzesten Weges in einem Netzwerk.

b) Lösen Sie das Problem für die in Tabelle 1 aufgelisteten Daten (alle Kosten sind in Zehntausend Euro angegeben).

Tabelle 1: Daten zum »Erneuerungsproblem«

i	C_i	B_i	S_i
1	5	100	70
2	10	120	55
3	15	100	30
4	20	105	20
5	25	125	10

Lösungshinweise

a) Knoten i ($i = 1, \ldots, 5$) repräsentiere den Beginn des i-ten Jahres innerhalb des Planungszeitraumes, Knoten 6 entspreche dem Ende des Planungszeitraumes. Für je zwei Knoten i, j mit $i < j$ führen wir einen Pfeil $\langle i, j\rangle$ mit der Bewertung $c\langle i, j\rangle$ ein.

$$c\langle i, j\rangle = B_i - S_{j-i} + \sum_{k=1}^{j-i} C_k$$

Beispielhaft seien die Berechnungen für die von Knoten 1 ausgehenden Pfeile in Tabelle 2 ausführlich dargestellt.

Tabelle 2: Beispielrechnung zur Pfeilbewertung

$\langle i, j\rangle$	B_i	S_{j-1}	C_k				
$\langle 1, 2\rangle$	100	$-\ 70$	$+\ 5$				
$\langle 1, 3\rangle$	100	$-\ 55$	$+\ 5$	$+\ 10$			
$\langle 1, 4\rangle$	100	$-\ 30$	$+\ 5$	$+\ 10$	$+\ 15$		
$\langle 1, 5\rangle$	100	$-\ 20$	$+\ 5$	$+\ 10$	$+\ 15$	$+\ 20$	
$\langle 1, 6\rangle$	100	$-\ 10$	$+\ 5$	$+\ 10$	$+\ 15$	$+\ 20$	$+\ 25$

Das Maschinen-Erneuerungsproblem entspricht dann der Bestimmung eines kürzesten Weges von Knoten 1 nach Knoten 6 in dem in Abbildung 1 gezeigten (bereits topologisch sortierten) Netzwerk.

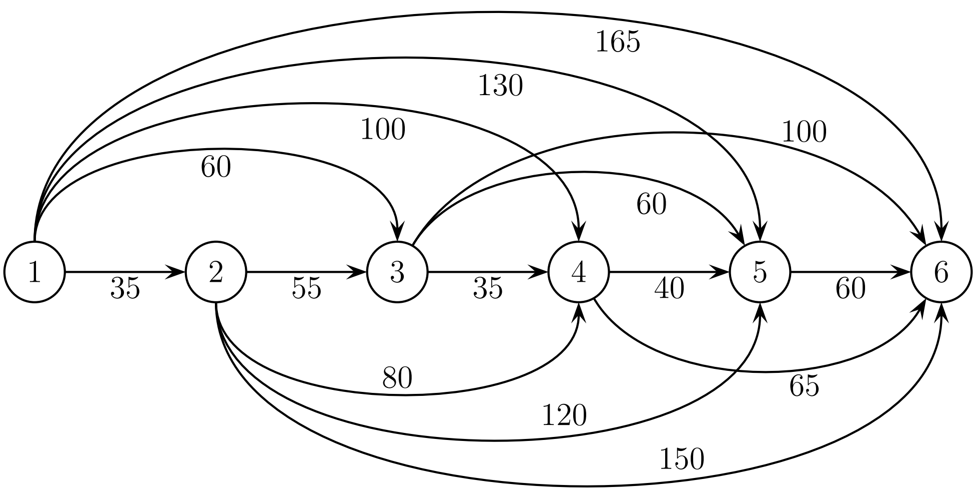

Abbildung 1: Netzwerk zum Reihenfolgeproblem

b) Bellmans Algorithmus liefert die in Tabelle 3 notierten Ergebnisse.

Tabelle 3: Schritte im Bellman Algorithmus zu Abbildung 1

	Schritte 1 + 2			Schritt 3.1			Schritt 3.2			Schritt 3.3		
j	d_j	q_j	δ_j^-	d_j	q_j	δ_j^-	d_j	q_j	δ_j^-	d_j	q_j	δ_j^-
$a = 1$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
2	∞	0	1	35	1	0	35	1	0	35	1	0
3	∞	0	2	60	1	1	60	1	0	60	1	0
4	∞	0	3	100	1	2	100	1	1	95	3	0
5	∞	0	4	130	1	3	130	1	2	120	3	1
6	∞	0	5	165	1	4	165	1	3	160	3	2
M	$\{1\}$			$\{2\}$			$\{3\}$			$\{4\}$		
k				1			2			3		

	Schritt 3.4			Schritt 3.5			Schritt 3.6		
j	d_j	q_j	δ_j^-	d_j	q_j	δ_j^-	d_j	q_j	δ_j^-
$a = 1$	0	1	0	0	1	0	0	1	0
2	35	1	0	35	1	0	35	1	0
3	60	1	0	60	1	0	60	1	0
4	95	3	0	95	3	0	95	3	0
5	120	3	0	120	3	0	120	3	0
6	160	3	1	160	3/4	0	160	3/4	0
M	$\{5\}$			$\{6\}$			$\{\}$		
k	4			5			6		

Mit Iterationsschritt 3.6 endet der Algorithmus, das Abbruchkriterium »$M = \varnothing$« ist erfüllt, und alle $\delta^-(i)$ haben den Wert 0. Die kürzesten Wege, insbesondere bis zum Ende des Planungszeitraums, sind unmittelbar ablesbar. $\langle 1, 3, 6\rangle$ und $\langle 1, 3, 4, 6\rangle$ sind kürzeste Wege von 1 nach 6 mit der Länge 160. Es gibt also zwei optimale Ersetzungspolitiken:

A: Ersetze zu Beginn von Jahr 3.

B: Ersetze zu Beginn der Jahre 3 und 4.

Die minimalen Gesamtkosten betragen 1,6 Mio. [Euro].