Aufgabe 1-3-7

Gegeben sei ein (3x4)-Spielbrett mit einer vereinfachten Gebirgslandschaft. Jedes Feld ist mit einer Bewertungszahl versehen, die vereinfacht als Höhenniveau interpretiert werden kann. Das Startfeld befindet sich links oben auf dem Niveau 5, und der Zielpunkt ist rechts unten auf Niveau 5 (siehe Tabelle 1a). Die Felder seien zeilenweise von links nach rechts mit Buchstaben **A** bis **L** bezeichnet (siehe Tabelle 1b).

Tabelle 1: a) Höhenniveaus b) Feldbezeichner

5	6	2	10
8	10	8	4
9	7	11	5

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L

Die Bewegung (der Spielzug) kann dabei nur waagerecht oder senkrecht um jeweils ein Feld erfolgen, wobei nicht zum unmittelbar vorangegangenen Feld zurückgekehrt wird. Geht man von Feld x zum Feld y, so wird dieser Zug mit $(x - y)^2$ bewertet. Ziel ist es, den Weg vom Startfeld **A** zum Zielpunkt **L** zu finden, der mit dem geringsten Gesamtaufwand verbunden ist.

a) Vervollständigen Sie den Graphen G in Abbildung 1; zeichnen Sie dazu die Kanten ein und notieren Sie jeweils die zugehörige Bewertung.

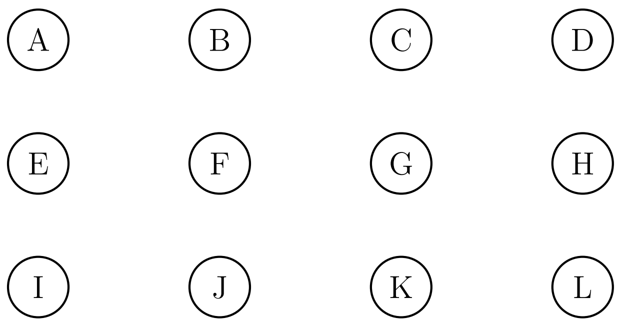

Abbildung 1: Graph G ohne Kanten und Bewertung

b) Begründen Sie, warum der Ford-Algorithmus zur Lösung der gestellten Aufgabe verwendet werden kann.

c) Lösen Sie das Problem mit dem Ford-Algorithmus, und tragen Sie die Iterationen vollständig in das vorgegebene Schema ein. Besonders auf die Menge M ist zu achten; sie ist für den Algorithmus von zentraler Bedeutung, da durch ihre Elemente die nächsten zu untersuchenden Knoten bestimmt werden.

Lösungshinweise

---

a) Ein Spielzug kann nur waagerecht oder senkrecht um jeweils ein Feld erfolgen. Geht man von Feld x zum Feld y, so wird dieser Zug mit $(x-y)^2$ bewertet. Bewegt man sich somit beispielsweise von **B** nach **C**, so wird die Kante [**B**, **C**] mit $(2-6)^2 = 16$ bewertet.
In Abbildung 2 sind alle Kanten und Bewertungen eingetragen.

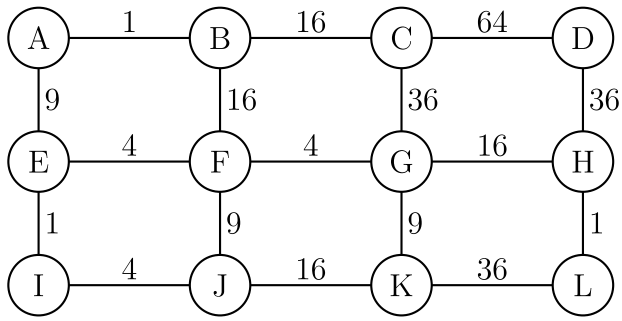

Abbildung 2: Graph G mit Kanten und Bewertung

b) Gesucht ist der kürzeste Weg von einem Startknoten (hier: **A**) zu einem Endknoten (hier: **L**) in einem bewerteten Graphen $G = [V, E; c]$ mit ganzzahliger Gewichtsfunktion c. Der Graph G enthält keine Zyklen negativer Länge. Im Algorithmus von Ford muss $S(j)$ durch $N(j)$ ersetzt werden.

c) Der Algorithmus von Ford mit liefert die in den Tabellen gezeigten Ergebnisse.

Tabelle 2: Iterationen zum Ford-Algorithmus

Iteration	1		Anmerkung
Knoten (j)	d_j	q_j	
A (1)	0	–	Setze $d_{\text{A}} = 0$, da A Startknoten.
B (2)	1	A	Setze $d_{\text{B}} = c_{\text{AB}}$.
C (3)	∞		
D (4)	∞		
E (5)	9	A	Setze $d_{\text{E}} = c_{\text{AE}}$.
F (6)	∞		
G (7)	∞		
H (8)	∞		
I (9)	∞		
J (10)	∞		
K (11)	∞		
L (12)	∞		
M	{B, E}		

Iteration	1		**2.1**		Anmerkung
Knoten (j)	d_j	q_j	d_j	q_j	
A (1)	0	–	0	–	
B (2)	1	A	1	A	
C (3)	∞		**17**	**B**	C ist nach Iteration 1 von A aus über B erreichbar.
D (4)	∞		∞		
E (5)	9	A	9	A	
F (6)	∞		**13**	**E**	F ist nach Iteration 1 von A aus über E erreichbar.
G (7)	∞		∞		
H (8)	∞		∞		
I (9)	∞		**10**	**E**	I ist nach Iteration 1 von A aus über E erreichbar.
J (10)	∞		∞		
K (11)	∞		∞		
L (12)	∞		∞		
M	{B, E}		{C, F, I}		

Iteration	1		2.1		**2.2**		**2.3**		**2.4**	
Knoten (j)	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j
A (1)	0	–	0	–	0	–	0	–	0	–
B (2)	1	A	1	A	1	A	1	A	1	A
C (3)	∞		17	B	17	B	17	B	17	B
D (4)	∞		∞		81	C	81	C	69	H
E (5)	9	A	9	A	9	A	9	A	9	A
F (6)	∞		13	E	13	E	13	E	13	E
G (7)	∞		∞		17	F	17	F	17	F
H (8)	∞		∞		∞		33	G	33	G
I (9)	∞		10	E	10	E	10	E	10	E
J (10)	∞		∞		14	I	14	I	14	I
K (11)	∞		∞		∞		26	G	26	G
L (12)	∞		∞		∞		∞		34	H
M	{B, E}		{C, F, I}		{D, G, J}		{H, K}		{D, L}	

Im Iterationsschritt 2.5 erhalten wir $M = \varnothing$, das Verfahren bricht also ab. Das Ergebnis kann nun in Tabelle 3 abgelesen werden. Der Weg zum Knoten L wird rückwärts über die jeweils angegebenen Vorgängerknoten konstruiert.

Tabelle 3: Ergebnis der Wegbestimmung mit dem Ford-Algorithmus

Iteration	**2.5**		Anmerkung
Knoten (j)	d_j	q_j	
A (1)	0	–	
B (2)	1	A	
C (3)	17	B	
D (4)	69	H	
E (5)	9	A	5. Vorgängerknoten von E ist Startknoten A
F (6)	13	E	4. Vorgängerknoten von F ist E
G (7)	17	F	3. Vorgängerknoten von G ist F
H (8)	33	G	2. Vorgängerknoten von H ist G
I (9)	10	E	
J (10)	14	I	
K (11)	26	G	
L (12)	34	H	1. Vorgängerknoten von L ist H

