Aufgabe 1-3-8

Gegeben sei der bewertete, gerichtete Graph $\vec{G} = \langle V, E; c \rangle$ in Abbildung 1.

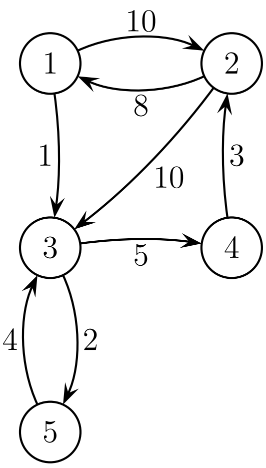

Abbildung 1: Digraph $\vec{G}$

a) Erstellen Sie zu dem Digraph in Abbildung 1 die Bewertungsmatrix C.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Tripel-Algorithmus die kürzesten Entfernungen zwischen allen Knoten des gegebenen Graphen. Ein Mitführen der Vorgängermatrizen Q ist **zwingend erforderlich**.

c) Sie haben als Ergebnis die Matrizen D und Q bestimmt. In welchem Teil der jeweiligen Matrizen können Sie die Länge bzw. den Verlauf der kürzesten Wege von Knoten 5 zu allen anderen Knoten ablesen?

Lösungshinweise

a)

$$C(\vec{G}) := \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 5 & 2 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

b) Wir starten den Tripel-Algorithmus mit $D^{(1)} = C$; $Q^{(1)}$ gibt die Vorgängerknoten an. Die für die Tripel-Operation benötigten Spalten ν und Zeilen ν in den Matrizen $D^{(\nu)}$ sind jeweils eingerahmt. Gilt $d_{\nu j}^{(\nu)} + d_{i\nu}^{(\nu)} < d_{ij}^{(\nu)}$, so ist das Element $d_{ij}^{(\nu)}$ mit $\triangleright$ markiert. In $D^{(1)}$ trifft diese Bedingung für das Element $d_{23}^{(1)}$ zu.

$$D^{(1)} = \left[\begin{array}{r|rrrr} 0 & 10 & 1 & \infty & \infty \\ \hline 8 & 0 & \triangleright\, 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 5 & 2 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 0 \end{array}\right] \qquad Q^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Der Tripel-Algorithmus wird nun fortgesetzt. In nachfolgenden Schritten $\nu + 1$ werden veränderte $d_{ij}^{(\nu+1)}$ und $q_{ij}^{(\nu+1)}$ fett hervorgehoben.

$$D^{(2)} = \left[\begin{array}{r|r|rrr} 0 & 10 & 1 & \infty & \infty \\ \hline 8 & 0 & \mathbf{9} & \infty & \infty \\ \hline \infty & \infty & 0 & 5 & 2 \\ \triangleright\, \infty & 3 & \triangleright\, \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 0 \end{array}\right] \qquad Q^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D^{(3)} = \left[\begin{array}{rr|r|rr} 0 & 10 & 1 & \triangleright\, \infty & \triangleright\, \infty \\ 8 & 0 & 9 & \triangleright\, \infty & \triangleright\, \infty \\ \hline \infty & \infty & 0 & 5 & 2 \\ \hline \mathbf{11} & 3 & \mathbf{12} & 0 & \triangleright\, \infty \\ \infty & \infty & 4 & \triangleright\, \infty & 0 \end{array}\right] \qquad Q^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \mathbf{2} & 4 & \mathbf{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D^{(4)} = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 0 & \triangleright 10 & 1 & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ 8 & 0 & 9 & \mathbf{14} & \mathbf{11} \\ \triangleright\infty & \triangleright\infty & 0 & 5 & 2 \\ \hline 11 & 3 & 12 & 0 & \mathbf{14} \\ \hline \triangleright\infty & \triangleright\infty & 4 & \mathbf{9} & 0 \end{array}\right] \qquad Q^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ 2 & 2 & 1 & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 5 & \mathbf{3} & 5 \end{bmatrix}$$

$$D^{(5)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{9} & 1 & 6 & 3 \\ 8 & 0 & 9 & 14 & 11 \\ \mathbf{16} & \mathbf{8} & 0 & 5 & 2 \\ 11 & 3 & 12 & 0 & 14 \\ \hline \mathbf{20} & \mathbf{12} & 4 & 9 & 0 \end{array}\right] \qquad Q^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{4} & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$D^{(6)}$ und $Q^{(6)}$ stimmen mit $D^{(5)}$ und $Q^{(5)}$ überein.

c) Zeile 5 von $Q^(6)$ entnehmen wir die kürzesten Wege von 5 zu allen anderen Knoten. Beispielsweise hat der Weg von 5 nach 2 die Länge $d_{52}^{(6)} = 12$; in $q_{52}^{(6)}$ liest man den Vorgänger von 2 ab (Knoten 4), in $q_{54}^{(6)}$ steht der Vorgänger von 4 (Knoten 3) und in $q_{53}^{(6)}$ der Vorgänger von 3 (Knoten 5). Insgesamt hat man damit $\langle 5, 3, 4, 2\rangle$ als kürzesten Weg konstruiert.
