Aufgabe 1-4-1

Gegeben sei das in Abbildung 1 gezeigte Netzwerk $\vec{N}$ mit den angegebenen Maximalkapazitäten κ_{ij} (alle Minimalkapazitäten sind Null).

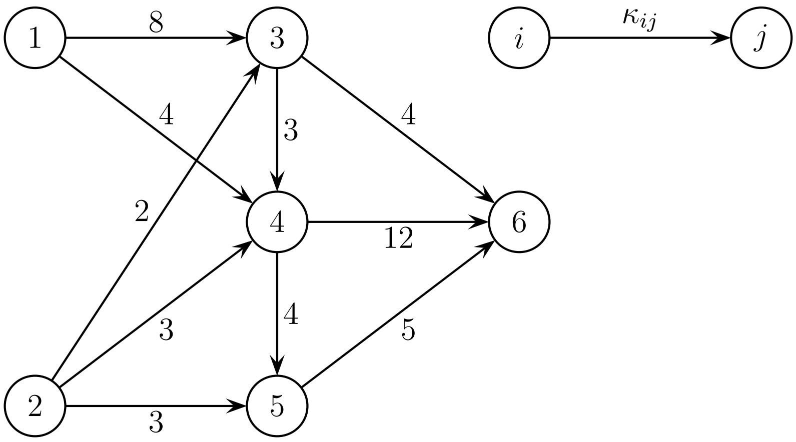

Abbildung 1: Netzwerk $\vec{N}$

a) Berechnen Sie den maximalen Fluss mit Hilfe des Algorithmus von Ford & Fulkerson.

b) Geben Sie einen minimalen Schnitt an!

Lösungshinweise

a) Zunächst werden eine neue Flussquelle 0 sowie die Pfeile $\langle 0,1\rangle$ und $\langle 0,2\rangle$ mit Maximalkapazität ∞ hinzugefügt. Es ergibt sich das Netzwerk $\vec{N}^1$ in Abbildung 2. Der Anfangsfluss hat die Stärke 0.

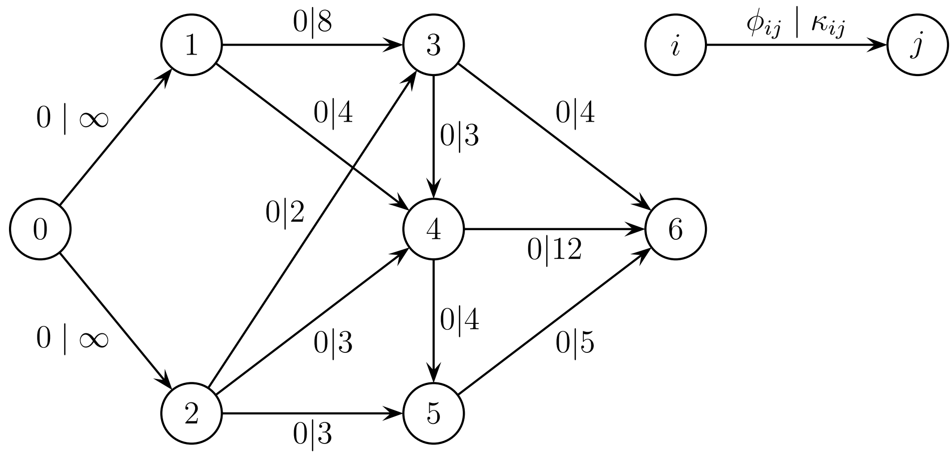

Abbildung 2: Netzwerk $\vec{N}^1$ mit Nullfluss und Kapazitäten

Der Ford-Fulkerson-Algorithmus startet nun mit der Markierung der Quelle (siehe Tabelle 1, Iteration 1-1).

Tabelle 1: Iteration 1 zum Ford-Fulkerson-Algorithmus

Knoten	Iteration				
i	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5
0	$+,\infty$	$+,\infty$	$+,\infty$	$+,\infty$	$+,\infty$
1		$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$
2		$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$
3			$1^+,8$	$1^+,8$	$1^+,8$
4			$1^+,4$	$1^+,4$	$1^+,4$
5				$2^+,3$	$2^+,3$
6					$3^+,4$
Erhöhung					4

Nachfolger von Knoten 0 sind die Knoten 1 und 2. Diese werden wie in 1-2 angegeben markiert. Da auf diesen Verbindungen keine Kapazitätsbeschränken bestehen, kann noch unendlich viel fließen; Knoten 0 ist jeweils der Vorgänger; die Pfeile $\langle 0,1\rangle$ und $\langle 0,2\rangle$ werden in Pfeilrichtung durchlaufen, deshalb »+« als Index.

Im nächsten Schritt wird Knoten 1 ausgewählt, und es werden die noch nicht markierten Nachfolger bestimmt, das sind die Knoten 3 und 4. Auf $\langle 1,3\rangle$ können 8 ME fließen, auf $\langle 1,4\rangle$ sind es 4 ME. In Spalte 1-3 sind die Markierungen eingetragen.

In Spalte 1-4 ist die Markierung von Knoten 5 hinzugefügt. Dieser ist Nachfolger von Knoten 2; Knoten 3 und 4 sind ebenfalls Nachfolger, wurden aber bereits in der vorherigen Runde markiert.
Als letztes erfolgt die Markierung der Senke 6; hier kommen wir von Knoten 3 mit maximal 4 ME wegen der Beschränkung auf $\langle 3, 6\rangle$.

Nun wird rückwärts der flusserhöhende Weg konstruiert: Die Senke 6 wurde von Knoten 3 erreicht, Knoten 3 von Knoten 1 und Knoten 1 von Knoten 0 aus. Der Fluss der Stärke 4 ist im Netzwerk $\vec{N}^2$ in Abbildung 3 eingetragen.

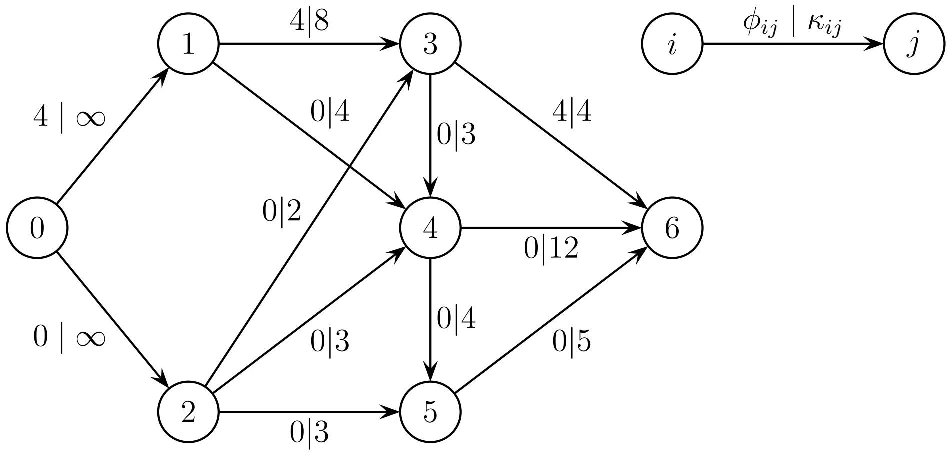

Abbildung 3: Netzwerk $\vec{N}^2$ mit Fluss der Stärke 4

Der Ford-Fulkerson-Algorithmus liefert die in Tabelle 2 zusammengestellten Knotenmarkierungen. Die Netzwerke $\vec{N}^3$ und $\vec{N}^4$ in den anschließenden Abbildungen 4 und 5 entsprechen den Flüssen nach dem 3. bzw. dem 5. Iterationsschritt.

Tabelle 2: Iterationen zum Ford-Fulkerson-Algorithmus

Knoten	Iteration					
i	1	2	3	4	5	6
0	$+,\infty$	$+,\infty$	$+,\infty$	$+,\infty$	$+,\infty$	$+,\infty$
1	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$
2	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$	$0^+,\infty$
3	$1^+,8$	$1^+,4$	$1^+,4$	$1^+,4$	$1^+,1$	$1^+,1$
4	$1^+,4$	$1^+,4$	$2^+,3$	$3^+,3$	–	–
5	$2^+,3$	$2^+,3$	$2^+,3$	$2^+,3$	$2^+,3$	–
6	$3^+,4$	$4^+,4$	$4^+,3$	$4^+,3$	$5^+,3$	–
Erhöhung	4	4	3	3	3	0
Flusstärke	4	8	11	14	17	17

Im 6. Iterationsschritt kann die Senke nicht mehr markiert werden. Der Fluss mit der Stärke 17 ist maximal.

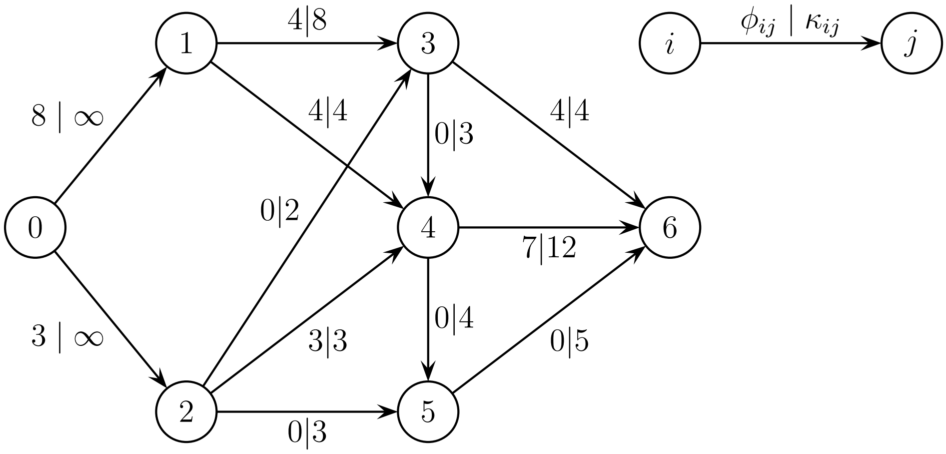

Abbildung 4: Netzwerk $\vec{N}^3$ nach Iteration 3 mit Fluss der Stärke 11

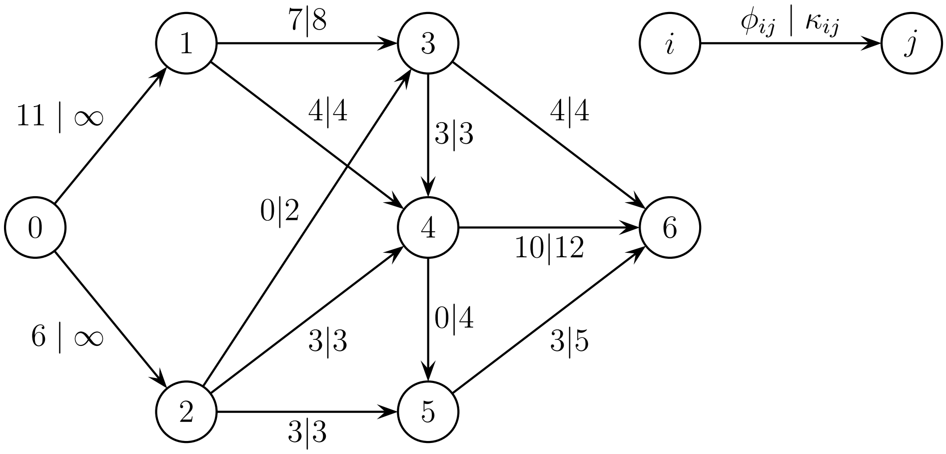

Abbildung 5: Netzwerk $\vec{N}^4$ nach Iteration 5 mit Fluss der Stärke 17

b) Der minimale Schnitt ist in der letzten Iteration 6 des Ford & Fulkerson-Algorithmus unmittelbar ablesbar. Die Menge $A = \{0, 1, 2, 3\}$ entspricht der Menge der Knoten, deren Markierung noch möglich war. In $B = \{4, 5, 6\}$ stehen dagegen die Knoten, die nicht mehr markiert werden konnten. Es ist deshalb wichtig, in der letzten Iteration stets alle noch möglichen Markierungen einzutragen.
$C\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle\}$ repräsentiert dann den Schnitt zum Netzwerk $\vec{N}$.
Da die untere Kapazität $\lambda(C\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle)$ gleich 0 ist, wird die Kapazität des Schnittes $\mu(C\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle)$ allein durch $\kappa(C\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle)$ bestimmt; sein Wert ist 17.

