Aufgabe 1-4-4

Gegeben sei das in Abbildung 1 gezeigte Netzwerk $\vec{N}$ mit den angegebenen Pfeilkapazitäten λ_{ij} und κ_{ij}.

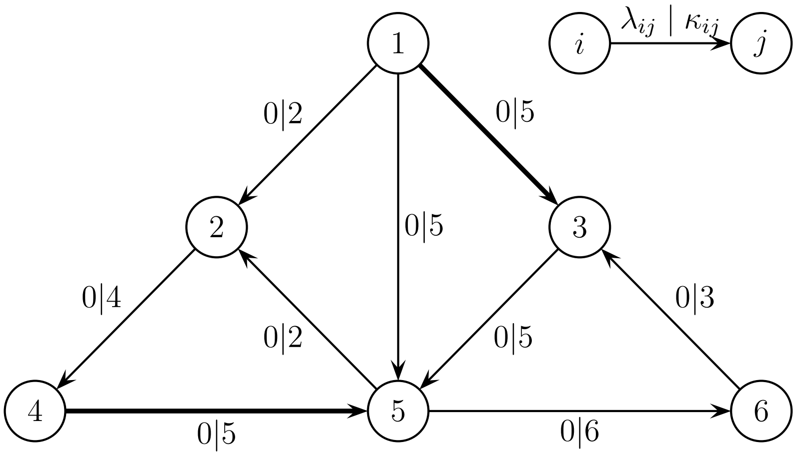

Abbildung 1: Netzwerk $\vec{N}$ mit Pfeilkapazitäten

a) Bestimmen Sie in $\vec{N}$ alle (1,5)-Schnitte, welche die Pfeile $\langle 1, 3\rangle$ und $\langle 4, 5\rangle$ enthalten.

b) Ermitteln Sie mit Teil (a) und den Ihnen bekannten Sätzen eine obere Schranke für die Stärke des maximalen Flusses von Quelle 1 zu Senke 5.

c) Stellen Sie fest, ob folgende Zuordnung einen zulässigen Fluss von Knoten 1 zu Knoten 5 darstellt:
$\phi_{12} = \phi_{24} = \phi_{45} := 2,$
$\phi_{13} = \phi_{35} := 5,$
$\phi_{ij} := 0$ sonst.

d) Geben Sie nach einen Fluss vergrößernden Semiweg an, mit dem der Fluss aus Teil (c) maximal wird. Es muss kein Algorithmus angewendet werden.

e) Nennen Sie alle starken Zusammenhangskomponenten des Netzwerkes $\vec{N}$.

Lösungshinweise

---

a) i) $A_1 = \{1, 2, 4\},\ B_1 = \{3, 5, 6\}$

ii) $A_2 = \{1, 4\},\ B_2 = \{2, 3, 5, 6\}$

iii) $A_3 = \{1, 2, 4, 6\},\ B_3 = \{3, 5\}$

iv) $A_4 = \{1, 4, 6\},\ B_3 = \{2, 3, 5\}$

b) Zu den in a) angegebenen Schnitten berechnen sich folgende Kapazitäten:

i) $C\langle A_1, B_1\rangle = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 4, 5\rangle\}$
$\mu(C\langle A_1, B_1\rangle) = \kappa(C\langle A_1, B_1\rangle) = 15$

ii) $C\langle A_2, B_2\rangle = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 4, 5\rangle\}$
$\mu(C\langle A_2, B_2\rangle) = \kappa(C\langle A_2, B_2\rangle) = 17$

iii) $C\langle A_3, B_3\rangle = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 6, 3\rangle\}$
$\mu(C\langle A_3, B_3\rangle) = \kappa(C\langle A_3, B_3\rangle) = 18$

iv) $C\langle A_4, B_4\rangle = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 4, 5, \langle 6, 3\rangle\}$
$\mu(C\langle A_4, B_4\rangle) = \kappa(C\langle A_4, B_4\rangle) = 20$

Hinweis: Die Minimalkapazität λ der jeweils konträren Schnitte ist in allen Fällen gleich 0.
Nach dem MaxFlow-MinCut-Theorem (Satz 4.3) ist der minimale Schnitt gleich dem maximalen Fluss; somit ermittelt man mit dem Minimum (15) der oben angegebenen Schnitte eine obere Schranke für den maximalen Fluss von Knoten 1 zu Knoten 5.

c) Der angegebene Fluss ist zulässig; es gilt in jedem Knoten die Flussbedingung (4.1).

d) Durch Hinzufügen eines Teilflusses mit dem Wert 5 auf dem Pfeil $\langle 1, 5\rangle$ wird der Fluss maximal.

e) Es gibt zwei starke Zusammenhangskomponenten: Die Quelle 1 und die Knotenmenge $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.
