Aufgabe 2-7-1

Vier Ziegeleien (abgekürzt mit A_1 bis A_4) haben fünf Baustellen (abgekürzt mit B_1 bis B_5) mit Ziegelsteinen zu beliefern. Die Kapazitäten der Ziegeleien (in 10.000 Stück) entnehmen Sie bitte Tabelle 1.

Tabelle 1: Kapazitäten

[10 T.Stck]	A_1	A_2	A_3	A_4
Kapazität	9	19	11	10

Der Bedarf der Baustellen (in 10.000 Stück) steht in Tabelle 2.

Tabelle 2: Bedarf an den Baustellen

[10 T.Stck]	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
Kapazität	12	8	15	7	7

Ferner ist in Tabelle 3 die Entfernungstabelle gegeben; die Kosten sind proportional zu den Entfernungen.

Tabelle 3: Entfernungen Ziegelei - Baustelle (in 10 km)

[10 km] nach von	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	3	9	5	2
A_2	11	7	5	10	8
A_3	9	5	9	6	8
A_4	5	4	10	8	6

a) Bestimmen Sie das bei minimalen Kosten optimale Transportprogramm, weisen Sie die Optimalität nach und begründen Sie Ihre Antwort. Wählen Sie geeignete Verfahren. Notieren Sie die Reihenfolge, in der gemäß Algorithmus die Streichung der Zeilen und Spalten vorgenommen wird. Geben Sie zusätzlich die Transportkosten für jede realisierte Verbindung an, und notieren Sie die Gesamtsumme der Transportkosten.

b) Auf der Strecke $\langle A_3, B_2\rangle$ muss aus verkehrstechnischen Gründen der Transport eingestellt werden. Bestimmen Sie auf Basis der Lösung von Teil a) der Aufgabe wiederum das bei minimalen Kosten optimale Transportprogramm. Auch hier darf der Nachweis der Optimalität nicht fehlen!
Hinweis: Stepping-Stone ist bei Optimalität eines Transportplans auch dazu geeignet, Elemente aus der Basis zu entfernen.

Lösungshinweise

---

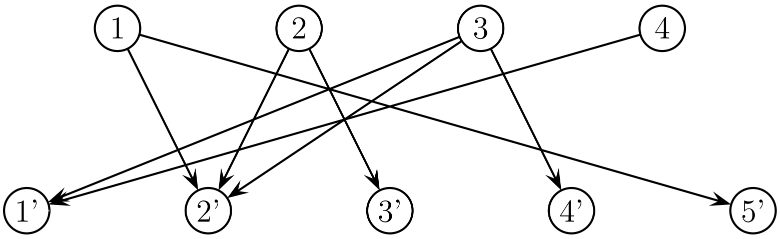
a) In dem in Tabelle 4 angegebenen Tableau können Sie die einzelnen Schritte der Vogel-Approximation nachvollziehen. Als x_{ij} ist für die realisierten Verbindungen jeweils die Menge der zu transportierenden Ziegel eingetragen. In der Spalte a_i wie auch in der Zeile b_j sind die zwischenzeitlich korrigierten Angebote bzw. Bedarfe notiert. Die Spalte/Zeile mit Bezeichnung o gibt Auskunft über die Reihenfolge der Zeilen- bzw. Spaltenstreichungen. In den Spalten und Zeilen Δc wurden die jeweils nach Streichung korrigierten Differenzen der Kostenwerte notiert. Die in einer Iteration ausgewählten maximalen Differenzen sind fett gedruckt.
Hinweis: In der fünften Iteration wurde der Δc-Wert 4 in der Spalte B_1 bestimmt und Zeile A_4 gestrichen.
In der sechsten Iteration können die Restmengen in Zeile A_3 direkt zugewiesen werden.

Tabelle 4: Lösung mit Vogels-Approximations-Methode (Schritt 1)

j i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	Δc			o
A_1	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 2 ④	$\boxed{9}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$ 7 ②	~~9~~ 2	1	1	**2**	**4.**
A_2	$\boxed{11}$	$\boxed{7}$ 4 ③	$\boxed{5}$ 15 ①	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	~~19~~ 4	2	1	**3**	**3.**
A_3	$\boxed{9}$ 2 ⑥	$\boxed{5}$ 2 ⑥	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$ 7 ⑥	$\boxed{8}$	11	1	1	1	
A_4	$\boxed{5}$ 10 ⑤	$\boxed{4}$	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	10	1	1	1	**5.**
b_j	~~12~~ 2	~~8~~ ~~4~~ 2	15	7	7					
Δc	1	1	**4**	1	**4**					
	1	1		1						
	4	1		2						
o			**1.**		**2.**					

$\boxed{c_{ij}}$ x_{ij} ⓚ

Die mit der Vogel-Approximation ermittelte Ausgangslösung lautet also (Angaben in 10.000 Stück):
$x_{12} = 2$; $x_{15} = 7$; $x_{22} = 4$; $x_{23} = 15$; $x_{31} = 2$; $x_{32} = 2$; $x_{34} = 7$; $x_{41} = 10$.
Der sich aus den Entfernungen ergebende Zielfunktionswert berechnet sich zu: $2 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 15 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 10 \cdot 5 = 243$.



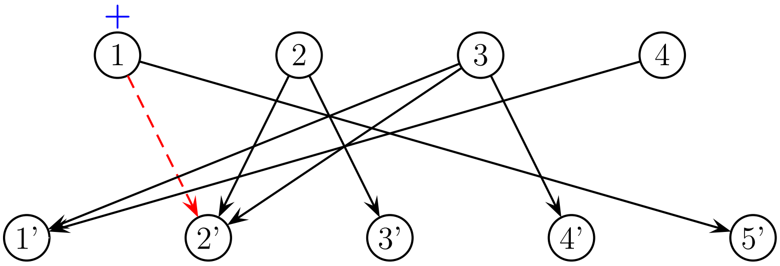
Um zu prüfen, ob die gefundene Lösung bereits optimal ist, berechnet man u_i/u_j sowie die reduzierten Kosten; die Werte wurden gemäß Legende in die Tabelle eingetragen.

Tabelle 5: Stepping-Stone (Schritt 2)

j i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i	Δu_i
A_1	6 -1 ⊕	3 2 ⊖	9 8	5 1	2 7	0	**−1**
A_2	11 0	7 4	5 15	10 2	8 2	4	
A_3	9 2 ⊖	5 2 ⊕	9 6	6 7	8 4	2	
A_4	5 10	4 3	10 11	8 6	6 6	-2	
u_j	-7	-3	-1	-4	-2		
Δu_j					**−1**		

c_{ij}	x_{ij}
$\bar{c}_{ij}$	

Da in der Lösung negative reduzierte Kosten auftreten, besteht die Möglichkeit einer Lösungsverbesserung. Es ist $\bar{c}_{11} = -1$ und somit wird das Feld $(1, 1)$ mit einem $\oplus$ markiert; auf dieser Verbindung soll ein Transport stattfinden. Entsprechend ist der Transport auf den Verbindungen $(1, 2)$ und $(3, 1)$ zu verringern und auf der Verbindung $(3, 2)$ zu erhöhen.



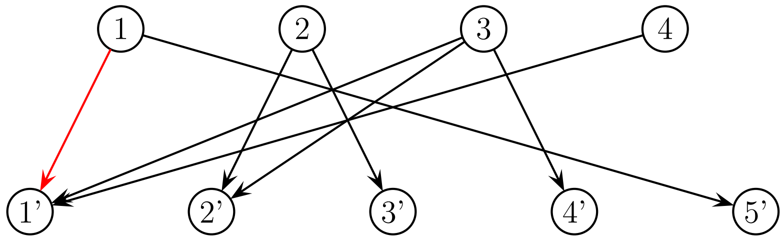
Die maximale Änderung ergibt sich aus dem Feld $(1,2)$ (oder auch $(3,1)$); sie hat den Wert $\delta = 2$ (siehe Tabelle 5). Der Basisbaum zerfällt in zwei Teilbäume; weiter betrachtet wird der Teilbaum, der mit $+$ markiert ist und nur aus dem Pfeil $\langle 1, 5' \rangle$ besteht.

Es folgt die Potentialänderung und damit verbunden die Änderung der reduzierten Kosten (vgl. Tabelle 6). Der Teilbaum besteht nur aus den Knoten 1 und 5’, die zu A_1 und B_5 gehören; entsprechend sind u_1 und u_5' zu korrigieren.

Tabelle 6: Stepping-Stone (Schritt 3)

j i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i	Δu_i
A_1	6 | 2	3 | 1	9 | 9	5 | 2	2 | 7	-1	
A_2	11 | 0	7 | 4	5 | 15	10 | 2	8 | 1	4	
A_3	9 | 0	5 | 4	9 | 6	6 | 7	8 | 3	2	
A_4	5 | 10	4 | 3	10 | 11	8 | 6	6 | 5	-2	
u_j	-7	-3	-1	-4	-3		
Δu_j							

c_{ij} | x_{ij} $\bar{c}_{ij}$



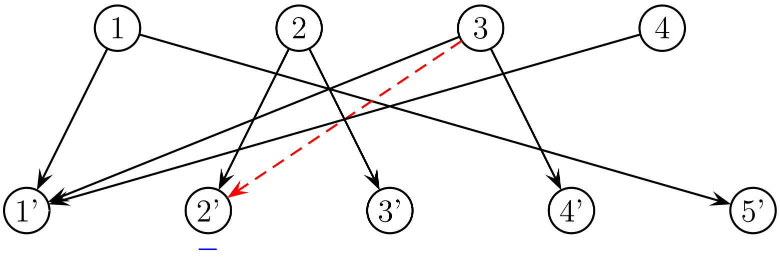
Eine optimale Lösung ist gefunden (Angaben in 10.000 Stück):
$x_{11} = 2$; $x_{15} = 7$; $x_{22} = 4$; $x_{23} = 15$; $x_{31} = 0$; $x_{32} = 4$; $x_{34} = 7$; $x_{41} = 10$.
Der sich aus den Entfernungen ergebende Zielfunktionswert berechnet sich zu: $2 \cdot 6 + 7 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 15 \cdot 5 + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 10 \cdot 5 = 241$.

b) Die Einstellung des Transports auf der Strecke $\langle A_3, B_2\rangle$ kann algorithmisch umgesetzt werden, indem mittels Stepping-Stone die Variable x_{32} aus der Basis entfernt, ihre Aufnahme im Folgenden verboten und die Optimalität unter Berücksichtigung dieser Restriktion wieder herbeigeführt wird.

Tabelle 7: Stepping-Stone

j / i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i	Δu_i
A_1	6 2	3 1	9 9	5 2	2 7	-1	
A_2	11 0	7 4	5 15	10 2	8 1	4	**-3**
A_3	9 0 $\oplus$	5 $\cancel{4}$ $\ominus$	9 6	6 7	8 3	2	
A_4	5 10 $\ominus$	4 3 $\oplus$	10 11	8 6	6 5	-2	
u_j	-7	-3	-1	-4	-3		
Δu_j		**-3**	**-3**				

c_{ij} x_{ij}
$\bar{c}_{ij}$



Neu hinzu kommt dabei der Pfeil $\langle A_4, B_2\rangle$, aktuell mit reduzierten Kosten $c_{42} = 3$. Bestimmt durch den Knoten 2' finden Veränderungen der Potentiale in Zeile 2 und den Spalten 2 und 3 statt; nachfolgend sind auch die reduzierten Kosten zu korrigieren. Diesen Schritt sowie die weitren Iterationen entnehmen Sie bitte den Tabellen 8 und 9.

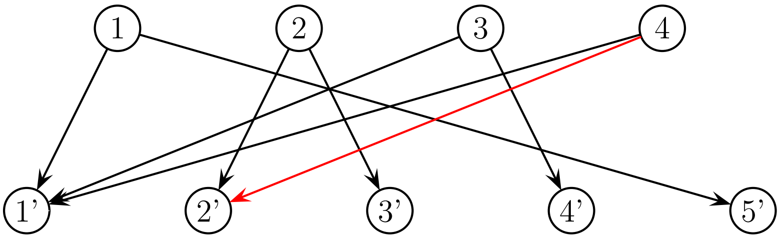


Tabelle 8: Stepping-Stone

j / i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i	Δu_i
A_1	6 2 ⊖	3 -2 ⊕	9 6	5 2	2 7	-1	**-2**
A_2	11 3	7 4	5 15	10 5	8 4	1	
A_3	9 4	5 ~~0~~ -3	9 3	6 7	8 3	2	
A_4	5 6 ⊕	4 4 ⊖	10 8	8 6	6 5	-2	
u_j	-7	-6	-4	-4	-3		
Δu_j					**-2**		

c_{ij} x_{ij}
$\bar{c}_{ij}$

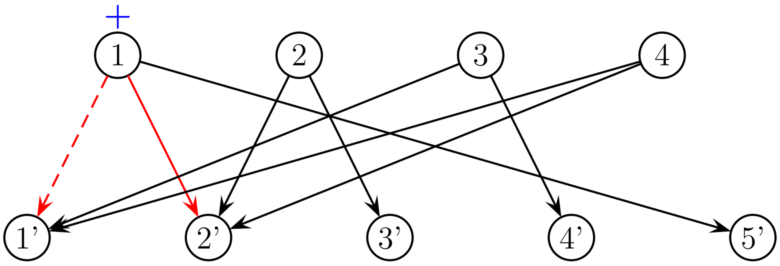


Tabelle 9: Stepping-Stone

j / i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i	Δu_i
A_1	6 2	3 2	9 8	5 4	2 7	-3	
A_2	11 3	7 4	5 15	10 5	8 4	1	
A_3	9 4	5 ~~0~~ -3	9 3	6 7	8 1	2	
A_4	5 8	4 2	10 8	8 6	6 3	-2	
u_j	-7	-6	-4	-4	-5		
Δu_j							

c_{ij} x_{ij}
$\bar{c}_{ij}$