Aufgabe 2-9-2

Auf einer Maschine sind 6 verschiedene Arbeitsgänge durchzuführen. Das Ausführen des Arbeitsganges A_j im Anschluss an den Arbeitsgang A_i verursacht Umrüstkosten in Höhe von c_{ij} Geldeinheiten (GE). Die Kosten sind in der nachfolgenden Matrix zusammengestellt, wobei der Wert ∞ eingetragen wurde, falls eine Umrüstung unmöglich bzw. völlig unzweckmäßig ist.

$$\begin{pmatrix} \infty & 30 & 34 & 26 & \infty & 12 \\ 34 & \infty & 32 & 37 & 46 & 28 \\ \infty & 31 & \infty & 27 & 48 & \infty \\ 19 & 26 & 27 & \infty & 34 & 17 \\ 36 & 14 & 19 & 24 & \infty & 42 \\ 18 & 33 & 26 & 21 & 36 & \infty \end{pmatrix}$$

Beispiel: Die Vorbereitungen für den Arbeitsgang A_4 nach durchgeführtem Arbeitsgang A_6, also die Umrüstung von A_6 nach A_4, kostet 21 GE. Eine Umrüstung von A_3 nach A_6 ist nicht möglich.
Ziel ist es, die Ausführungsreihenfolge der Arbeitsgänge so zu wählen, dass die Gesamtrüstkosten minimal werden.
Geht man zusätzlich davon aus, dass die Arbeitsgänge in Perioden immer wieder durchgeführt werden müssen, ist das Problem vergleichbar mit dem eines Handelsreisenden, der die kürzeste Rundreise durch verschiedene Städte sucht.

a) Lösen Sie als Vorbereitung zunächst das Zuordnungsproblem, bei dem Sie unter Berücksichtigung der gegebenen Kostenstruktur jedem Arbeitsgang einen Nachfolger zuordnen. Verwenden Sie hierzu die in der Einheit 2 (Modul 31801) vorgestellte »Ungarische Methode«.

b) Falls in a) keine Rundreise entstanden ist, fügen Sie die Teiltouren möglichst kostengünstig zusammen und geben eine mögliche Arbeitsabfolge an! Formulieren Sie Ihre Überlegungen, die zu der von Ihnen ermittelten Reihenfolge geführt haben. Gefragt ist hier lediglich nach einer (wohl begründeten) Heuristik.

Lösungshinweise

---

a) Ausgangsmatrix mit Zeilenminima und um Zeilenminima reduzierte Matrix mit Spaltenminima:

$$\begin{pmatrix} \infty & 30 & 34 & 26 & \infty & 12 \\ 34 & \infty & 32 & 37 & 46 & 28 \\ \infty & 31 & \infty & 27 & 48 & \infty \\ 19 & 26 & 27 & \infty & 34 & 17 \\ 36 & 14 & 19 & 24 & \infty & 42 \\ 18 & 33 & 26 & 21 & 36 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 28 \\ 27 \\ 17 \\ 14 \\ 18 \end{matrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \infty & 30 & 34 & 26 & \infty & 12 \\ 34 & \infty & 32 & 37 & 46 & 28 \\ \infty & 31 & \infty & 27 & 48 & \infty \\ 19 & 26 & 27 & \infty & 34 & 17 \\ 36 & 14 & 19 & 24 & \infty & 42 \\ 18 & 33 & 26 & 21 & 36 & \infty \end{pmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 17 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

Matrix der reduzierten Kosten:

$$\begin{pmatrix} \infty & 18 & 18 & 14 & \infty & 0 \\ 6 & \infty & 0 & 9 & 1 & 0 \\ \infty & 4 & \infty & 0 & 4 & \infty \\ 2 & 9 & 6 & \infty & 0 & 0 \\ 22 & 0 & 1 & 10 & \infty & 28 \\ 0 & 15 & 4 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

Die Menge unabhängiger Nullen besteht aus den Positionen $(1,6)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,2)$, $(6,1)$. Daraus ergibt sich zwar eine gültige (optimale) Zuordnung, aber keine zusammenhängende Umrüstreihenfolge, bei der der Ausgangszustand wieder erreicht wird. Folgende Teiltouren werden gebildet:

$(1,6,1)$ mit Kosten von $12 + 18 = 30$ GE

$(2,3,4,5,2)$ mit Kosten von $32 + 27 + 34 + 14 = 107$ GE

b) Die in Teil (a) gefundene Zuordnung stellt eine untere Schranke für eine vollständige »Rundreise« dar. Die Lösung kann etwa als Relaxation für das Branch & Bound Verfahren verwendet werden. Ausführlich wird dieses Verfahren in der Einheit 2 des Moduls 32621 »Ganzzahlige Optimierung« behandelt. In dieser Aufgabe war nicht nach der optimalen Lösung gefragt. Um eine geschlossene Folge von Arbeitsgängen zu erhalten, ist folgende heuristische Vorgehensweise denkbar: Die in Teil (a) gefundenen Zyklen werden unter Kostengesichtspunkten aufgebrochen. Man erhält die Reihenfolgen [1-6] und [5-2-3-4]; die günstigste Kombination ist [5-2-3-4-1-6] mit Gesamtumrüstkosten von 140 GE bei periodischen Arbeitsabläufen.
