Aufgabe 3-3-1

Zehn Abgeordnete eines Parlaments gehören sechs verschiedenen Ausschüssen an. Jeder Ausschuss tagt jede Woche genau einmal. Ist ein Abgeordneter Mitglied in zwei verschiedenen Ausschüssen, so dürfen diese nicht am selben Tag stattfinden.

Die Abgeordneten **A**dam, **B**ertold, **C**ramer, **D**rießen, **E**ngel, **F**reitag, **G**untlach, **H**ausmann, **I**ding und **J**ansen – im folgenden identifiziert durch ihre Anfangsbuchstaben – sind wie folgt den Ausschüssen I, II bis VI zugeordnet:

I:	{**A**,**C**,**D**}	II:	{**A**,**B**,**E**,**F**}	III:	{**B**,**G**,**H**}
IV:	{**C**,**E**,**J**}	V:	{**D**,**G**,**I**,**J**}	VI:	{**F**,**H**,**I**}

a) Zeichnen Sie einen Graphen, in dem die Ausschüsse durch Knoten repräsentiert werden. Falls zwei Ausschüsse ein Mitglied gemeinsam haben, werden die zugehörigen Knoten durch eine Kante verbunden.

b) Färbt man alle Knoten des in (a) gezeichneten Graphen mit unterschiedlichen Farben ein, so entspricht dies der trivialen Lösung, bei der die Ausschusssitzungen an sechs Tagen der Woche stattfinden. Verwenden Sie die „Farben“ MO, DI, MI, DO, FR, SA. Sie sollen nun diese Lösung mittels Nachbarschaftssuche verbessern und färben dazu zunächst den Knoten VI mit der Farbe FR (Ausgangslösung). Stellen Sie die Ausgangslösung in ihrem Graphen dar.

  i) Nennen Sie eine Bewertungsfunktion zur Färbung eines Graphen, deren Minimierung zur Zulässigkeit führt. Welchen Wert erhält die Ausgangslösung?

  ii) Wie kann für das gegebene Problem der Nachbarschaftsbegriff definiert sein? Nennen Sie konkret alle Nachbarn zur Ausgangslösung und bewerten Sie diese mit der in (i) angegebenen Funktion!

  iii) Führen Sie gemäß des in Abschnitt 3.3 (Einheit 3 des Moduls 31801) vorgestellten Verbesserungsverfahrens drei Schritte mit der in (i) angegebenen Bewertung und dem in (ii) festgelegten Nachbarschaftsbegriff durch. Tragen Sie Ihre Lösung in ein Schema gemäß Tabelle 1 ein.

Tabelle 1: Lösungsschema

aktuelle Lösung	f_{akt}	Nachbarlösungen	f_N	Akzeptanz

Lösungshinweise

---

a) Es ergibt sich der Graph in Abbildung 1, der die Besetzung der Ausschüsse visualisiert.

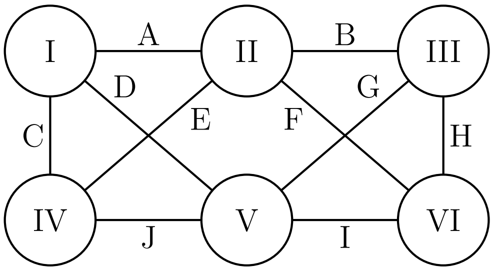
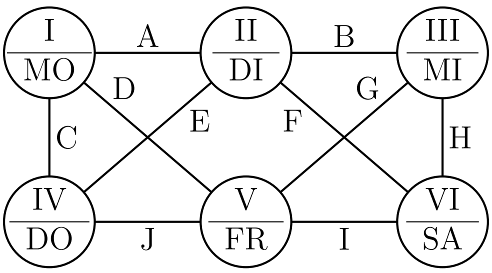


Abbildung 1: Besetzung der Ausschüsse

b) Nach Einfärbung gemäß der angegebenen Vorschrift entsteht zunächst der linke Graph in Abbildung 2 mit den Farben MO, DI, MI, DO, FR, SA. Die Änderung der Farbe im Knoten VI von SA auf FR führt zum Graphen auf der rechten Seite, in dem der Konflikt durch zwei gestrichelte Linien kenntlich gemacht wurde.



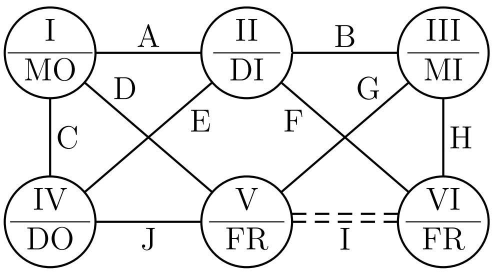


Abbildung 2: Besetzung der Ausschüsse nach Änderung

i) Als Bewertung eines Graphen für Algorithmen zur Lösung des Färbungsproblems sind verschiedene Funktionen denkbar. Bei Minimierung der Funktion sollte das Optimum im Minimum auch erreicht werden. Eine einfache Bewertung erfolgt mit der Anzahl der Kanten, die Knoten gleicher Farbe verbinden. Mit dem Minimum ist gleichzeitig eine zulässige Lösung, d.h. eine Färbung des Graphen erreicht. In der Ausgangslösung gibt es **eine** Kante, die Knoten gleicher Farbe verbindet.

ii) Die Färbung eines Graphen kann als Partition der Knotenmenge interpretiert werden. Dazu fasst man Knoten gleicher Färbung zu einer Menge zusammen; in unserem Beispiel: MO: {I}, DI: {II}, MI: {III}, DO: {IV}, FR: {V,VI}. Verlangt man, dass in den benachbarten Graphen höchstens die bereits vorhandenen Farben verwendet werden sollen, so entsteht eine Menge benachbarter Graphen beispielsweise, indem man einen der Konfliktknoten aus einer Menge entfernt und zu einer anderen Menge hinzufügt. Dies kann noch eingeschränkt werden, indem man nur die Vorgänger- und die Nachfolgermenge als neue Mengen zulässt. In unserem Beispiel gibt es mit der genannten Einschränkung also insgesamt vier Nachbarn mit den nebenstehend notierten Bewertungen:

MO: {I}, DI: {II}, MI: {III}, DO: {IV, V}, FR: {VI}	1
MO: {I, V}, DI: {II}, MI: {III}, DO: {IV}, FR: {VI}	1
MO: {I}, DI: {II}, MI: {III}, DO: {IV, VI}, FR: {V}	0
MO: {I, VI}, DI: {II}, MI: {III}, DO: {IV}, FR: {V}	0

Tabelle 2: Lösungsschritte Teil 1

aktuelle Lösung	f_{akt}	Nachbarlösungen	f_N	Akz.
{I}{II}{III}{IV}{V,VI}	1	{I}{II}{III}{IV,V}{VI}	1	
		{I,V}{II}{III}{IV}{VI}	1	
		{I}{II}{III}{IV,VI}{V}	0	ja
		{I,VI}{II}{III}{IV}{V}	0	

iii) Zwei der benachbarten Lösungen besitzen einen minimalen Funktionswert zu der in i) angegebenen Bewertungsvorschrift. Damit bricht das Verfahren zunächst ab, die Anzahl der Farben wird weiter reduziert und die Iteration beginnt von neuem. Aus MO: {I}, DI: {II}, MI: {III}, DO: {IV, VI}, FR: {V} wird beispielsweise MO: {I}, DI: {II}, MI: {III}, DO: {IV, V, VI}. Diese Lösung führt zu einer Bewertung von 2, da sowohl IV und V, als auch V und VI durch eine Kante verbunden sind. Das Verfahren wird fortgesetzt:

Tabelle 3: Lösungsschritte Teil 2

aktuelle Lösung	f_{akt}	Nachbarlösungen	f_N	Akz.
{I}{II}{III}{IV,V,VI}	2	{I}{II}{III,IV}{V,VI}	1	ja
		{I,IV}{II}{III}{V,VI}	2	
		{I}{II}{III,V}{IV,VI}	1	
		{I,V}{II}{III}{IV,VI}	1	
		{I}{II}{III,VI}{IV,V}	2	
		{I,VI}{II}{III}{IV,V}	1	

