Aufgabe 3-3-2

Gegeben sei folgendes Rucksackproblem

$$\max \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i$$

so dass

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \leq K$$
$$x_i \in \{0,1\}$$

mit $K := 100$. Die Gewichte p_i und Werte w_i der $n = 6$ möglichen Gegenstände i $(1 \leq i \leq 6)$ stehen in Tabelle 1.

Tabelle 1: Gewicht und Wert der Gegenstände

i	p_i	w_i
1	30	34
2	16	20
3	17	18
4	27	19
5	46	13
6	53	42

Lösen Sie das Problem mit einem Verbesserungsverfahren durch eine einfache Nachbarschaftssuche (vgl. Algorithmus 3.1 in Einheit 3, Modul 31801). Die Ausgangslösung x^0 sei $(x_1^0,\ldots,x_6^0) = (0,0,0,0,0,0)$ (keine Gegenstände im Rucksack), die Nachbarschaft $N(x)$ einer Lösung x bestehe aus zulässigen Lösungen, die durch Hinzunahme, Entfernen oder durch Austausch **eines** Gegenstands entstehen.

Berechnen Sie in jedem Schritt Gesamtgewicht und -wert jeder Nachbarlösung und wählen sie die zulässige Lösung als Ausgangslösung für die nächste Iteration aus, die den größten Wert aufweist und zudem eine Verbesserung bedeutet. Führen Sie den Suchprozess solange fort, bis Sie ein lokales Optimum bestimmt haben.

Lösungshinweise

Die Nachbarschaftssuche beginnt mit der Lösung $x^0 = (0,0,0,0,0,0)$ mit Gewicht 0 und Wert 0. In dieser Situation ist nur die Hinzunahme eines Gegenstands möglich, was in der ersten Spalte der nachfolgenden Tabelle durch »H« vermerkt ist. Der Tausch wird in der Folge durch »T« und das Entfernen durch »E« gekennzeichnet. Unzulässige Lösungen sind im weiteren Verlauf durchgestrichen.

Operation	Lösung	Gewicht	Wert
H	(**0**,**0**,**0**,**0**,**0**,**1**)	**53**	**42**
H	(1,0,0,0,0,0)	30	34
H	(0,1,0,0,0,0)	16	20
H	(0,0,0,1,0,0)	27	19
H	(0,0,1,0,0,0)	17	18
H	(0,0,0,0,1,0)	46	13

Die Lösungen sind nach Wert sortiert. Mit der Hinzunahme des Gegenstands 6 wird die größte Verbesserung erzielt, und somit ist $x^1 = (0,0,0,0,0,1)$ die Ausgangslösung für die nächste Iteration. Sie hat das Gewicht 53 und den Wert 42. Es wird die neue Nachbarschaft bestimmt, die der Tabelle zu entnehmen ist.

Operation	Lösung	Gewicht	Wert
H	(**1**,**0**,**0**,**0**,**0**,**1**)	**83**	**76**
H	(0,1,0,0,0,1)	69	62
H	(0,0,0,1,0,1)	80	61
H	(0,0,1,0,0,1)	70	60
H	(0,0,0,0,1,1)	99	55
T	(1,0,0,0,0,0)	30	34
T	(0,1,0,0,0,0)	16	20
T	(0,0,0,1,0,0)	27	19
T	(0,0,1,0,0,0)	17	18
T	(0,0,0,0,1,0)	46	13
E	(0,0,0,0,0,0)	0	0

Mit der Lösung $x^2 = (1,0,0,0,0,1)$ (Gewicht 83; Wert 76) kann erneut eine Verbesserung erzielt und das Verfahren fortgesetzt werden.

Operation	Lösung	Gewicht	Wert
H	(**1**,**1**,**0**,**0**,**0**,**1**)	**99**	**96**
H	~~(1,0,0,1,0,1)~~	~~110~~	~~95~~
H	(1,0,1,0,0,1)	100	94
H	~~(1,0,0,0,1,1)~~	~~129~~	~~89~~
T	(0,1,0,0,0,1)	69	62
T	(0,0,0,1,0,1)	80	61
T	(0,0,1,0,0,1)	70	60
T	(0,0,0,0,1,1)	99	55
T	(1,1,0,0,0,0)	46	54
T	(1,0,0,1,0,0)	57	53
T	(1,0,1,0,0,0)	47	52
T	(1,0,0,0,1,0)	76	47
E	(0,0,0,0,0,1)	53	42
E	(1,0,0,0,0,0)	30	34

Mit der Lösung $x^3 = (1,1,0,0,0,1)$ (Gewicht 99; Wert 96) ist eine weitere Verbesserung möglich; das Verfahren wird fortgesetzt.

Lösung	Gewicht	Wert
~~(1,1,0,1,0,1)~~	~~126~~	~~115~~
~~(1,1,1,0,0,1)~~	~~116~~	~~114~~
~~(1,1,0,0,1,1)~~	~~145~~	~~109~~
~~(1,0,0,1,0,1)~~	~~110~~	~~95~~
(1,0,1,0,0,1)	100	94
~~(1,0,0,0,1,1)~~	~~129~~	~~89~~
(0,1,0,1,0,1)	96	81
(0,1,1,0,0,1)	86	80
(1,0,0,0,0,1)	83	76
~~(0,1,0,0,1,1)~~	~~115~~	~~75~~
(1,1,0,1,0,0)	73	73
(1,1,1,0,0,0)	63	72
(1,1,0,0,1,0)	92	67
(0,1,0,0,0,1)	69	62
(1,1,0,0,0,0)	46	54

Da alle zulässigen Nachbarn einen Wert kleiner als 96 aufweisen, handelt es sich bei der Lösung (1,1,0,0,0,1) um ein lokales Optimum bzgl. der gewählten Nachbarschaftsstruktur.

