Aufgabe 3-4-1

Durch das Einrichten von Standleitungen soll die Kommunikation zwischen verschiedenen wissenschaftlichen Instituten erleichtert werden. Im Einzelnen sind folgende Verbindungen herzustellen:

Universität in Hagen	———	**K**irkpatrick Institut
Kirkpatrick Institut	———	**C**erny Institut
Cerny Institut	———	**M**etropolis Institut
Universität in Hagen	———	**C**erny Institut
Glover Institut	———	**M**etropolis Institut
Cerny Institut	———	**H**olland Institut
Glover Institut	———	**H**olland Institut

Ein Institut hat dabei genau eine Frequenz zur Verfügung, auf der es mit den übrigen in Kontakt treten kann; verbundene Institute dürfen nicht dieselbe Frequenz verwenden. Ziel ist es, insgesamt möglichst wenig Frequenzen zu belegen.

Zur besseren Übersicht soll für die Firma Telemann eine Skizze erstellt werden, in der die Institute dargestellt und die obigen Verbindungen eingezeichnet sind. Zur Lösung dieses Problems ist Simulated Annealing (SimAnn) zu verwenden.

a) Abstrahieren Sie die obige Darstellung zu einem Graphen mit 6 Knoten. Versehen Sie hierbei Knoten mit den jeweiligen Anfangsbuchstaben der Institute und stellen Sie die Standleitungsverbindungen durch Kanten dar.

b) Färben Sie die Knoten nun so ein, dass gleichfarbige Knoten nicht durch eine Kante verbunden sind. Knoten gleicher Farbe werden zu Klassen K zusammengefasst.

Welche der folgende Einfärbungen sind zulässig, wenn K_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ jeweils eine andere Klassenfarbe bezeichnet ?

i) $\mathrm{K}_1 = \{\mathrm{G, M, U}\}$, $\mathrm{K}_2 = \{\mathrm{C}\}$, $\mathrm{K}_3 = \{\mathrm{H}\}$, $\mathrm{K}_4 = \{\mathrm{K}\}$

ii) $\mathrm{K}_1 = \{\mathrm{K, M}\}$, $\mathrm{K}_2 = \{\mathrm{C, G}\}$, $\mathrm{K}_3 = \{\mathrm{U}\}$, $\mathrm{K}_4 = \{\mathrm{H}\}$

iii) $\mathrm{K}_1 = \{\mathrm{H, M}\}$, $\mathrm{K}_2 = \{\mathrm{C, G}\}$, $\mathrm{K}_3 = \{\mathrm{U}\}$, $\mathrm{K}_4 = \{\mathrm{K}\}$

iv) $\mathrm{K}_1 = \{\mathrm{U}\}$, $\mathrm{K}_2 = \{\mathrm{C, H}\}$, $\mathrm{K}_3 = \{\mathrm{G, K}\}$, $\mathrm{K}_4 = \{\mathrm{M}\}$

c) Formulieren Sie eine geeignete Zielfunktion für das Färbungsproblem und geben Sie jeweils Werte für die in b) aufgeführten Einfärbungen an.

d) Die Nachbarschaftsstruktur zu einer Startlösung ist wie folgt definiert: Gemäß der lexikographischen Ordnung C $\prec$ G $\prec$ H $\prec$ K $\prec$ M $\prec$ U wird zunächst der Knoten mit niedrigster Ordnung - hier also C - solange neu eingefärbt, bis eine neue Lösung akzeptiert wird. Bei Akzeptanz der neuen Lösung wird der Knoten mit der nächst niedrigeren Ordnung - hier G - neu eingefärbt usw. Falls durch Neufärbung des Knotens überhaupt keine neue Lösung akzeptiert wird, erhält der Knoten wieder seine ursprüngliche Farbe.

Führen Sie das Verfahren gemäß des in der Einheit 3 des Moduls 31801 beschriebenen Pseudocodes (Algorithmus 4.1: Simulated Annealing) mit der von Ihnen in c) gewählten Zielfunktion und dem variablen Abkühlplan bei jedem Iterationsschritt $i : T_{i+1} = \frac{1}{2}T_i$, $T_0 := 20$ (die Boltzmann-Konstante wurde hier schon implizit mit eingerechnet) durch. Stellen Sie die Ergebnisse wie nachfolgend gezeigt tabellarisch dar. Verwenden Sie folgende Zufallszahlen: 0,78; 0,88; 0,95; 0,50; 0,71; 0,34; 0,07; 0,21; 0,57; 0,96; 0,69.

aktuelle Lösung	f_{akt}	Nachbarlösung	f_{neu}	Δf	T	$p(\Delta f, T_k)$	R	Akzeptanz
K_1={$\underline{\mathbf{C}}$,**K**} K_2={**G**,**U**} K_3={**H**,**M**}	1	K_1={**K**} K_2={$\underline{\mathbf{C}}$,**G**,**U**} K_3={**H**,**M**}	1	0	20	1,0	0,67	ja

e) Stellen Sie bitte allgemein die Bedeutung eines variablen Abkühlplans dar und führen Sie kurz die Konsequenzen durch Beibehaltung einer konstanten Anfangstemperatur $T_0 = 20$ für die in d) gelöste Aufgabe an.

f) In dieser Aufgabe und auch in der Ihnen bekannten Einheit 3 »*Optimierung mit Intelligenten Strategien*« wurde SimAnn als Minimierungsverfahren beschrieben. Geben Sie bitte zwei Vorgehensweisen an, wie SimAnn zur Lösung von Maximierungsaufgaben verwendet werden kann. Beziehen Sie sich dabei auf Algorithmus 4.1.

Lösungshinweise

a) In Abbildung 1 repräsentiert die Knotenmenge $V = \{\mathbf{C}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{U}\}$ die genannten Institute. Zwischen Knoten von Instituten, die verbunden sind, sind entsprechend Kanten eingezeichnet. Es entsteht mit Blick auf das Färbungsproblem ein Konfliktgraph.

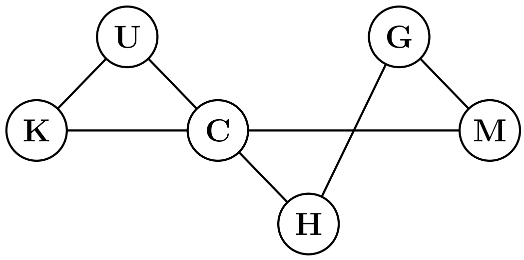

Abbildung 1: Konfliktgraph mit verbundenen Instituten

b) Die Einfärbungen i) und iv) sind nicht zulässig, da jeweils zwei Knoten gleicher Farbe mit einer Kante verbunden sind $\{[\mathbf{G},\mathbf{M}], [\mathbf{C},\mathbf{H}]\}$.

c) Es bezeichne $|E_i|$ die Anzahl der Knoten, die in der Klasse K_i durch eine Kante verbunden sind , dann lautet eine mögliche Zielfunktion: $\min \sum\limits_i |E_i|$.

Für die jeweiligen Färbungen in b) erhält man somit einen Zielfunktionswert: i) 1, ii) 0, iii) 0, iv) 1.

d) Siehe Tabelle 1 auf der nächsten Seite!

e) Durch die Akzeptanzregel werden auch Lösungsverschlechterungen toleriert. Je rascher die Abkühlung T und je größer die Lösungsverschlechterung Δ, desto geringer wird die Akzeptanzwahrscheinlichkeit einer schlechteren Lösung. Ein langsames Abkühlen führt zu einer hohen Anzahl von durchzuführenden Iterationen, wobei hingegen ein schnelles Abkühlen im Allg. auch zu schlechteren Ergebnissen führt.

f) Die einfachste Möglichkeit ist die Umformulierung der Maximierungsaufgabe in eine äquivalente Minimierungsaufgabe.
Eine weitere Möglichkeit besteht in der entsprechenden Umformulierung der Akzeptanzregel, konkret in den Zeilen 05 bis 08 des Algorithmus 4.1.

05 WENN $\Delta f < 0$, % Relationszeichen umgedreht
06 DANN generiere Zufallszahl $R \in [0, 1]$ gleichverteilt;
07 WENN $R < p(\Delta f, T_k)$, % Relationszeichen umgedreht
08 DANN GEHE ZU $(\mathrm{IT_{SA}})$;
wobei $p(\Delta f, T) = e^{\frac{\Delta f}{T}}$. % Vorzeichen geändert

aktuelle Lösung	f_{akt}	Nachbarlösung	f_{neu}	Δf	T	$p(\Delta f, T_k)$	R	Akzeptanz
$K_1=\{\underline{\mathbf{C}},\mathbf{K}\}$ $K_2=\{\mathbf{G},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{M}\}$	1	$K_1=\{\mathbf{K}\}$ $K_2=\{\underline{\mathbf{C}},\mathbf{G},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{M}\}$	1	0	20	1,0	0,67	ja
$K_1=\{\mathbf{K}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\underline{\mathbf{G}},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{M}\}$	1	$K_1=\{\underline{\mathbf{G}},\mathbf{K}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{M}\}$	1	0	10	1,0	0,78	ja
$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{K}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\underline{\mathbf{H}},\mathbf{M}\}$	1	$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{K},\underline{\mathbf{H}}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{M}\}$	2	1	5	0,819	0,88	nein
$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{K}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\underline{\mathbf{H}},\mathbf{M}\}$	1	$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{K}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\underline{\mathbf{H}},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{M}\}$	2	1	5	0,819	0,95	nein
$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{K}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\underline{\mathbf{H}},\mathbf{M}\}$	1	$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{K}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\underline{\mathbf{H}},\mathbf{M}\}$	1	0	5	1,0	0,50	ja
$K_1=\{\mathbf{G},\underline{\mathbf{K}}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{M}\}$	1	$K_1=\{\mathbf{G}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\underline{\mathbf{K}},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{M}\}$	3	2	5/2	0,449	0,71	nein
$K_1=\{\mathbf{G},\underline{\mathbf{K}}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{M}\}$	1	$K_1=\{\mathbf{G}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\underline{\mathbf{K}},\mathbf{M}\}$	1	0	5/2	1,0	0,34	ja
$K_1=\{\mathbf{G}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{K},\underline{\mathbf{M}}\}$	1	$K_1=\{\mathbf{G},\underline{\mathbf{M}}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\mathbf{U}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{K}\}$	2	1	5/4	0,449	0,07	ja
$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{M}\}$ $K_2=\{\mathbf{C},\underline{\mathbf{U}}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{K}\}$	2	$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{M},\underline{\mathbf{U}}\}$ $K_2=\{\mathbf{C}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{K}\}$	1	-1	5/8		0,21	ja
$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{M},\mathbf{U}\}$ $K_2=\{\underline{\mathbf{C}}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{K}\}$	1	$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{M},\mathbf{U},\underline{\mathbf{C}}\}$ $K_2=\{\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{K}\}$	3	2	5/16	0,002	0,57	nein
$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{M},\mathbf{U}\}$ $K_2=\{\underline{\mathbf{C}}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{K}\}$	1	$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{M},\mathbf{U}\}$ $K_2=\{\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{K},\underline{\mathbf{C}}\}$	3	2	5/16	0,002	0,96	nein
$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{M},\mathbf{U}\}$ $K_2=\{\underline{\mathbf{C}}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{K}\}$	1	$K_1=\{\mathbf{G},\mathbf{M},\mathbf{U}\}$ $K_2=\{\underline{\mathbf{C}}\}$ $K_3=\{\mathbf{H},\mathbf{K}\}$	1	0	5/16	1,0	0,69	ja

Tabelle 1: Ergebnis der Iterationen zu Algorithmus 4.1