Aufgabe 3-5-3

Der Lehrstuhl für Operations Research organisiert einen Workshop „Conditionals, Information, and Inference“, zu dem zahlreiche Fachleute aus dem In- und Ausland eingeladen sind. Die Beiträge der Vortragenden sind eingereicht und deren Themen im Internet bekannt gegeben. 10 der ca. 100 insgesamt erwarteten Teilnehmerinnen und Teilnehmer sind Honoratioren, denen man die Möglichkeit einräumt anzugeben, welche Vorträge Sie auf keinen Fall verpassen möchten. Bei der Organisation muss nun der Zeitplan so ausgearbeitet werden, dass zwei Vorträge, die ein Ehrengast hören möchte, auf keinen Fall zur selben Zeit stattfinden. Außerdem lautet aber auch die Vorgabe, dass durch parallele Sitzungen die Gesamttagungsdauer gestrafft wird.
Die Teilnehmenden und ihre Präferenzen sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1: Präferenzen der Ehrengäste

Vortrag Teilnehmende	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tinbergen	X	X							
Frisch					X		X		X
Samuelson			X	X					
Kusnez		X					X		
Hicks	X								X
Arrow		X	X						
Leontief				X		X			
Hayek					X			X	
Myrdal						X		X	
Koopmanns		X			X				

Das Zeitraster sieht nun vor, dass ab 9:00 Uhr Vorträge stets zur vollen Stunde eingeplant werden. Für den Fall, dass alle Vorträge nacheinander gehalten werden, wäre der Workshop ohne Berücksichtigung einer Mittagspause also erst um 18:00 Uhr beendet. Als Kodierung einer solchen Anordnung erhält man folgende Zeichenkette:
$x^0 = (\mathbf{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17})$.

a) Wie ist nun folgender String x_1 zu interpretieren, und repräsentiert er eine zulässige Anordnung der Vorträge?
$x^1 = (\mathbf{9,\ 10,\ 9,\ 12,\ 13,\ 11,\ 9,\ 11,\ 12})$.

Sie erinnern sich, dass Tabu Search für diese Planung ein geeignetes Verfahren sein könnte, und definieren einen *move* als Vorverlegung eines Vortrags um 1 Stunde, also beispielsweise von 14 auf 13 Uhr. Die Vorträge, die bereits um 9 Uhr beginnen, müssen hinter den aktuell letzten Vortrag gelegt werden. Zwei vollständige Zuordnungen der Vorträge zu Anfangszeiten, im folgenden stets Lösungen genannt, heißen benachbart, wenn die zweite durch eine Verlegung eines Vortrags in obigem Sinne aus der ersten hervorgegangen ist.

b) Notieren Sie alle Nachbarn $x^{11}, x^{12}, ..., x^{19}$ zum String x^1 und geben Sie an, ob die entstandene Zuordnung zulässig ist.

c) Ihre Aufgabe ist es nun, das Problem so durch einen Graphen darzustellen, dass die Vorträge durch Knoten repräsentiert werden und das Verbot von Kombinationen durch Kanten zum Ausdruck gebracht wird.

d) Eine bekannte Anwendung des Tabu Search Verfahrens ist die Knotenfärbung von Graphen. Ziel ist es hierbei, die Knoten des Graphen so einzufärben, dass mit einer Kante verbundene Knoten nicht die gleiche Farbe besitzen dürfen. Skizzieren Sie, weshalb das oben beschriebene Planungsproblem auch als Problem der Knotenfärbung in Graphen aufgefasst werden kann.

e) Eine Lösung für das Vortragsplanungsproblem heißt nun zulässig, wenn benachbarte Knoten nicht mit der selben Anfangszeit gekennzeichnet sind. Formulieren sie eine geeignete Zielfunktion, die bei Minimierung zur Zulässigkeit führt.

f) Bewerten Sie mit der in e) von Ihnen bestimmten Zielfunktion die in a) angegebene Reihenfolge x^1 und die in b) ermittelten Nachbarn.

g) Mit der Eigenschaftmenge $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_9\}$, wobei $E_i =$ „Farbe“ der i-ten Komponente, wird eine Zuordnung formal beschrieben. Notieren Sie sowohl den *from*- als auch den *to*-Attributen-Vektor für den Übergang von x^1 nach x^{11}.

Lösungshinweise

a) Durch den String $x^1 = (\mathbf{9, 10, 9, 12, 13, 11, 9, 11, 12})$ wird festgelegt, dass Vortrag 1 um 9:00 Uhr, Vortrag 2 um 10:00 Uhr, Vortrag 3 um 9:00 Uhr, Vortrag 4 um 12:00 Uhr, Vortrag 5 um 13:00 Uhr, Vortrag 6 um 11:00 Uhr, Vortrag 7 um 9:00 Uhr, Vortrag 8 um 11:00 Uhr und Vortrag 9 um 12:00 Uhr beginnt. Es handelt sich hierbei um keine zulässige Anordnung, da die beiden Vorträge 6 und 8 gleichzeitig stattfinden und damit dem Wunsch von Herrn Myrdal nicht entsprochen wird.

b)

Tabelle 2: Lösungen mit Vortragszeiten und Zulässigkeit

$x_{11} = (\mathbf{14, 10, 9, 12, 13, 11, 9, 11, 12})$	unzulässig
$x_{12} = (\mathbf{9, 9, 9, 12, 13, 11, 9, 11, 12})$	unzulässig
$x_{13} = (\mathbf{9, 10, 14, 12, 13, 11, 9, 11, 12})$	unzulässig
$x_{14} = (\mathbf{9, 10, 9, 11, 13, 11, 9, 11, 12})$	unzulässig
$x_{15} = (\mathbf{9, 10, 9, 12, 12, 11, 9, 11, 12})$	unzulässig
$x_{16} = (\mathbf{9, 10, 9, 12, 13, 10, 9, 11, 12})$	zulässig
$x_{17} = (\mathbf{9, 10, 9, 12, 13, 11, 14, 11, 12})$	unzulässig
$x_{18} = (\mathbf{9, 10, 9, 12, 13, 11, 9, 10, 12})$	zulässig
$x_{19} = (\mathbf{9, 10, 9, 12, 13, 11, 9, 11, 11})$	unzulässig

c) Im Graphen in Abbildung 1 werden die Vorträge durch Knoten repräsentiert, und das Verbot von Kombinationen wird durch Kanten zum Ausdruck gebracht.

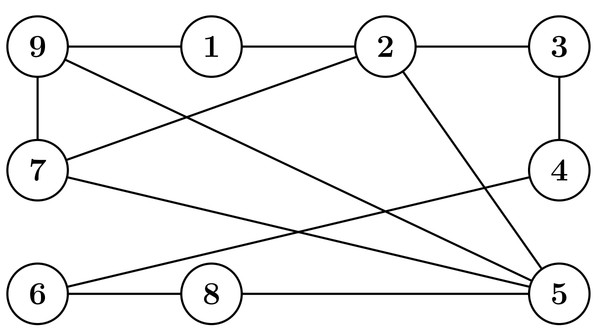

Abbildung 1: Konfliktgraph zu den Vortragszeiten

d) Die unterschiedlichen möglichen Anfangszeiten werden mit verschiedenen „Farben" identifiziert, und der Graph wird entsprechend eingefärbt. Für eine gegebene Zuordnung kann dann jeweils festgestellt werden, ob Restriktionen, die durch die Kanten visualisiert sind, verletzt werden; zwei mit einer Kante inzidente Knoten dürfen nicht dieselbe Farbe tragen. Für die mit x_1 vorgenommene Zuordnung erkennt man an der Verbindung der Knoten 6 und 8 die Verletzung einer solchen Restriktion.

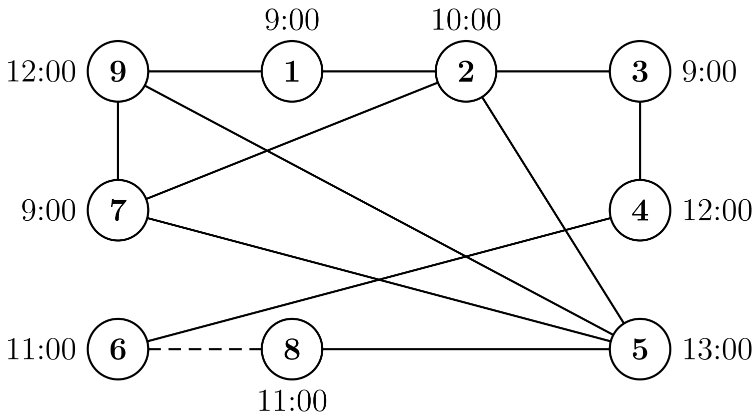

Abbildung 2: Konfliktgraph mit Einfärbung

e) Wie bereits im Abschnitt 4.3 der Einheit 3 des Moduls 31801 kann die Anzahl der Kanten mit inzidenten Knoten gleicher Färbung als Zielfunktionswert gewählt werden. Formal fasst man Knoten gleicher Farbe zu jeweils einer Klasse K_i zusammen und betrachtet den durch jede einzelne Klasse definierten Untergraphen. Für die mit x_1 notierte Färbung ergeben sich die 5 Klassen $K_1 = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{7}\}$, $K_2 = \{\mathbf{2}\}$, $K_3 = \{\mathbf{6}, \mathbf{8}\}$, $K_4 = \{\mathbf{4}, \mathbf{9}\}$, $K_5 = \{\mathbf{5}\}$ Definiert man als $\overline{K_i}$ die Knotenmengen, die entstehen, wenn man jeweils alle isolierten Knoten entfernt, so ergibt sich als mögliche Zielfunktion:

$$min f(x) \sum_{i=1}^{5} |\overline{K}_i|$$

mit $\overline{K}_i (i = 1,...,5)$

ist reduzierte Klassenaufteilung zur Anordnung x

Können alle Knoten aus einer Klasse entfernt werden, existieren offensichtlich keine Knoten dieser Farbe, die direkt miteinander verbunden sind; die Mächtigkeit der reduzierten Menge ist 0. Zielfunktionswert für eine zulässige Färbung ist somit insgesamt 0.

Mit weitergehenden Überlegungen ist es nun auch möglich, die Anzahl der insgesamt verwendeten Farben, eventuell mit einem Gewichtungsfaktor versehen, in die Zielfunktion aufzunehmen. Auf die Ausführung dieses Gedankens wird jedoch an dieser Stelle verzichtet.

f) x_1 : $K_1 = \{\mathbf{1{,}3{,}7}\}$, $K_2 = \{\mathbf{2}\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\mathbf{4{,}9}\}$, $K_5 = \{\mathbf{5}\}$
$\overline{K}_1 = \{\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\}$, $K_5 = \{\}$
$f(x_1) = 2$

x_{11} : $K_1 = \{\mathbf{3{,}7}\}$, $K_2 = \{\mathbf{2}\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\mathbf{4{,}9}\}$, $K_5 = \{\mathbf{5}\}$ $K_6 = \{\mathbf{1}\}$
$\overline{K}_1 = \{\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\}$, $K_5 = \{\}$, $K_6 = \{\}$
$f(x_{11}) = 2$

x_{12} : $K_1 = \{\mathbf{1{,}2{,}3{,}7}\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\mathbf{4{,}9}\}$, $K_5 = \{\mathbf{5}\}$
$\overline{K}_1 = \{\mathbf{1{,}2{,}3{,}7}\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\}$, $K_5 = \{\}$
$f(x_{11}) = 6$

x_{13} : $K_1 = \{\mathbf{1{,}7}\}$, $K_2 = \{2\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\mathbf{4{,}9}\}$, $K_5 = \{\mathbf{5}\}$, $K_6 = \{\mathbf{3}\}$
$\overline{K}_1 = \{\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\}$, $K_5 = \{\}$ $K_6 = \{\}$
$f(x_{13}) = 2$

x_{14} : $K_1 = \{\mathbf{1{,}3{,}7}\}$, $K_2 = \{\mathbf{2}\}$, $K_3 = \{\mathbf{4{,}6{,}8}\}$, $K_4 = \{\mathbf{9}\}$, $K_5 = \{\mathbf{5}\}$
$\overline{K}_1 = \{\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\}$, $K_5 = \{\}$
$f(x_{14}) = 3$

x_{15} : $K_1 = \{\mathbf{1{,}3{,}7}\}$, $K_2 = \{\mathbf{2}\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\mathbf{4{,}5{,}9}\}$
$\overline{K}_1 = \{\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\mathbf{5{,}9}\}$
$f(x_{15}) = 4$

x_{16} : $K_1 = \{\mathbf{1{,}3{,}7}\}$, $K_2 = \{\mathbf{2{,}6}\}$, $K_3 = \{\mathbf{8}\}$, $K_4 = \{\mathbf{4{,}9}\}$, $K_5 = \{\mathbf{5}\}$
$\overline{K}_1 = \{\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\}$, $K_4 = \{\}$, $K_5 = \{\}$
$f(x_{16}) = 0$

x_{17} : $K_1 = \{\mathbf{1{,}3}\}$, $K_2 = \{\mathbf{2}\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\mathbf{4{,}9}\}$, $K_5 = \{\mathbf{5}\}$, $K_6 = \{\mathbf{7}\}$
$\overline{K}_1 = \{\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\}$, $K_5 = \{\}$ $K_6 = \{\}$
$f(x_{17}) = 2$

x_{18} : $K_1 = \{\mathbf{1{,}3{,}7}\}$, $K_2 = \{\mathbf{2{,}8}\}$, $K_3 = \{\mathbf{6}\}$, $K_4 = \{\mathbf{4{,}9}\}$, $K_5 = \{\mathbf{5}\}$
$\overline{K}_1 = \{\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\}$, $K_4 = \{\}$, $K_5 = \{\}$
$f(x_{18}) = 0$

x_{19} : $K_1 = \{\mathbf{1{,}3{,}7}\}$, $K_2 = \{2\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8{,}9}\}$, $K_4 = \{\mathbf{4}\}$, $K_5 = \{\mathbf{5}\}$
$\overline{K}_1 = \{\}$, $K_2 = \{\}$, $K_3 = \{\mathbf{6{,}8}\}$, $K_4 = \{\}$, $K_5 = \{\}$
$f(x_{19}) = 2$

g)

$$\mathit{from}(x_1, x_{11}) = (\mathbf{9}, -, -, -, -, -, -, -, -)$$
$$\mathit{to}(x_1, x_{11}) = (\mathbf{14}, -, -, -, -, -, -, -, -)$$