Aufgabe 3-5-4

In einem soeben eröffneten Supermarkt besteht die Möglichkeit, dass die Kundschaft die eingekauften Waren persönlich scannt und die zu zahlende Summe dann am Kassenautomaten angezeigt wird. Wird der Betrag bar bezahlt (Münzeinwurf bzw. Scheineinzug), landet das entsprechende Rückgeld im Ausgabefach des Automaten. Durch die Automatisierung erhofft sich der Supermarkt Fehlervermeidung bei der Herausgabe von Wechselgeld und weitere Einsparungen im Personalbereich.
Die Rückgabe der Münzen soll in der Weise gesteuert werden, dass bei der Stückelung des Betrages die Anzahl der im Automat verbleibenden Münzen möglichst gleichmäßig verteilt ist. Die zur Verfügung stehenden Münzwerte seien 1, 2, 5, 10, 20 und 50 Cent sowie 1 und 2 €. Zu einem Betrag x soll die Stückelung durch einen Vektor w angegeben werden. So entspricht $\boldsymbol{w} = (1,1,1,0,0,1,0,2)$ dem Betrag 4,58 €. Analog wird durch einen Vektor $\boldsymbol{a}$ die Anzahl der aktuell im Automaten befindlichen Münzen beschrieben. Zum betrachteten Zeitpunkt sei dies $\boldsymbol{a} = (30,42,21,70,60,53,44,67)$.

a) Geben Sie eine Vorschrift (Funktion) an, mit der es möglich ist, einen Münzvektor $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_8)$ so zu bewerten, dass vor dem Hintergrund des Ziels der gleichmäßigen Münzverteilung im Automaten der Funktionswert minimal ist. Berechnen Sie dann den zugehörigen Wert $f(\boldsymbol{a})$ für die aktuelle Münzverteilung $\boldsymbol{a}$ und tragen ihn in die Zeile 1 des Lösungsschemas der Tabelle 1 ein.

b) Betrachten Sie zum Rückgeldbetrag 4,58 € den Vektor
$\boldsymbol{w}_1^0 = (1,1,1,0,0,1,0,2)$
und notieren Sie für den nach Auszahlung resultierenden Vektor
$\boldsymbol{a}_1^0 = (29,41,20,70,60,52,44,65)$ ebenfalls die Bewertung gemäß a);
tragen Sie diesen Wert in Zeile 2 des Schemas ein.

c) Die Ausgangslösung $\boldsymbol{w}_1^0$, also eine erste gültige Stückelung zu einem Rückgabebetrag, wird stets so ermittelt, dass die Gesamtzahl an Münzen minimal ist. Die Aufteilung der Münzen soll hinsichtlich des formulierten Ziels der gleichmäßigen Münzverteilung im Automaten durch Tabu-Search optimiert werden. Zur Erzeugung der Nachbarschaft kommt die Operation **Zerlegen** zur Anwendung:
Zerlegen: $-(\boldsymbol{w}, i)$ bedeutet, dass in einer Position $i > 1$ in $\boldsymbol{w}$ die Zahl, falls sie größer als 0 ist, um 1 vermindert wird und die Anzahlen der nächst kleineren Münzwerte gemäß ihrer Wertigkeit erhöht werden. (50 wird dabei durch $2*20+1*10$ und 5 durch $2*2+1*1$ ersetzt.)

 © FernUniversität in Hagen

Notieren Sie die vollständige Nachbarschaft zum Vektor
$\boldsymbol{w}_1^0 = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 2)$
durch Anwendung von $-(\boldsymbol{w}, i)$ für alle möglichen $i \in \{2, \ldots, 8\}$, ermitteln Sie den jeweils resultierenden Vektor $\boldsymbol{a}_1$ der Restmünzverteilung und bestimmen Sie mittels der in a) vorgeschlagenen Bewertung die Güte der jeweils entstehenden Nachbarlösung.
Tragen Sie die Ergebnisse in die nächsten Zeilen (3 bis 9) des Schemas ein; nicht alle Zeilen müssen genutzt werden.

d) Wählen Sie eine beste Lösung aus, und notieren diese in Zeile 10 des Schemas. Falls der Betrag noch nicht ausgezahlt wird, ist die so gewählte Stückelung Ausgangspunkt für die nächste Iteration in Tabu Search.

e) Die Informationen zu einer Zerlegung des Rückgeldbetrages sollen in der Tabu-Liste mittels Attribut zur Eigenschaft „Wert der $i - ten$ Komponente“ gespeichert werden. Tragen Sie den $from$-Attribut-Vektor und den *to*-Attribut-Vektor der Tabu-Liste für die neue Lösung in die Zeilen 11 und 12 der Tabelle 1 ein.

Tabelle 1: Ergebnistabelle zur Münzverteilung

Zeile	$\boldsymbol{w} \vert \boldsymbol{a}$	$f(\boldsymbol{a})$
1	$\boldsymbol{a} = (30, 42, 21, 70, 60, 53, 44, 67)$	
2	$\boldsymbol{w}_1^0 = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 2)$ $\boldsymbol{a}_1^0 = (29, 41, 20, 70, 60, 52, 44, 65)$	
3	$\boldsymbol{w}_1^1 =$ $\boldsymbol{a}_1^1 =$	
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10	$\boldsymbol{w}_2^0 :=$ $\boldsymbol{a}_2^0 :=$	
	Attribute	
11		
12		

Lösungshinweise

a) Das Ziel der gleichmäßigen Münzverteilung im Kassenautomaten lässt sich durch die Abweichung der Anzahl einer Münzsorte vom Mittelwert der Anzahlen aller Münzsorten bewerten. Summiert man diese Abweichungen auf und bildet auch hier den Mittelwert ergibt sich eine individuelle Bewertungszahl für jede Stückelung eines Auszahlungsbetrages.

$$f(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}|a_i - \overline{a}| \qquad mit \qquad \overline{a} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} a_i$$

Die Bewertung von $f(\boldsymbol{a})$ berechnet sich somit zu 14,13.

a) bis e)

Zeile	$\boldsymbol{w}\vert\boldsymbol{a}$	$f(\boldsymbol{a})$
1	$\boldsymbol{a} = (30, 42, 21, 70, 60, 53, 44, 67)$	14,13
2	$\boldsymbol{w}_1^0 = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 2)$ $\boldsymbol{a}_1^0 = (29, 41, 20, 70, 60, 52, 44, 65)$	14,13
3	$\boldsymbol{w}_1^1 = (3, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2)$ $\boldsymbol{a}_1^1 = (27, 42, 20, 70, 60, 52, 44, 65)$	14,25
4	$\boldsymbol{w}_1^2 = (2, 3, 0, 0, 0, 1, 0, 2)$ $\boldsymbol{a}_1^2 = (28, 39, 21, 70, 60, 52, 44, 65)$	14,38
5	$\boldsymbol{w}_1^3 = (1, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 2)$ $\boldsymbol{a}_1^3 = (29, 41, 20, 69, 58, 53, 44, 65)$	13,88
6	$\boldsymbol{w}_1^4 = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 2, 1)$ $\boldsymbol{a}_1^4 = (29, 41, 20, 70, 60, 52, 42, 66)$	14,50
10	$\boldsymbol{w}_1^3 = (1, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 2) =: \boldsymbol{w}_2^0$ $\boldsymbol{a}_1^3 = (29, 41, 20, 69, 58, 53, 44, 65) =: \boldsymbol{a}_2^0$	13,88
	Attribute	
11	$from(\boldsymbol{a}_1^0, \boldsymbol{a}_2^0) = [-, -, -, 70, 60, 52, -, -]$	
12	$to(\boldsymbol{a}_1^0, \boldsymbol{a}_2^0) = [-, -, -, 69, 58, 53, -, -]$	