Aufgabe B0303

Eine Möglichkeit zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen bietet auch die Middle-Square-Methode von Neumann. Dazu wird ein zweistelliger Startwert quadriert und die mittleren zwei Stellen dienen als neuer Startwert. Fehlen vorangehende Stellen, so werden diese mit Nullen gefüllt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} z_1 &= 26 \\ z_1^2 &= 676 \rightarrow 0676 \\ z_2 &= 67 \\ z_2^2 &= 4489 \\ z_3 &= 48 \end{aligned}$$

usw.

Auf dem Intervall (0;1)-verteilte Zufallszahlen x erhält man durch Normieren: $x = \frac{z}{99}$.

a) Generieren Sie mit dem Neumann-Verfahren 15 normierte Zufallszahlen, beginnend mit dem Startwert $z_1 = 42$.

b) Generieren Sie 15 normierte Zufallszahlen mit der multiplikativen Kongruenzgenerator nach Lehmer bei Wahl der Parameter: $z_0 = 133$, $m = 1024$ und $k = 3125$.

c) Überprüfen Sie die unter a) und b) erzeugten Zufallszahlen mit dem einfachen Test auf gleichverteilte Zufallszahlen. Welches Verfahren würden Sie vorziehen? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Lösungshinweise

a), b)

Mit den angegeben Startwerten lassen sich mit den beiden Verfahren jeweils folgende 15 Zufallszahlen erzeugen.

Neumann-Verfahren		**Lehmer-Verfahren**	
i	x_i	i	y_i
1	0,42	1	0,88
2	0,77	2	0,84
3	0,78	3	0,56
4	0,93	4	0,86
5	0,46	5	0,81
6	0,11	6	0,7
7	0,12	7	0,11
8	0,14	8	0,85
9	0,19	9	0,98
10	0,36	10	0,81
11	0,29	11	0,91
12	0,85	12	0,08
13	0,05	13	0,40
14	0,02	14	0,17
15	0,00	15	0,95

c) Ein einfacher Test auf normierte gleichverteilte Zufallszahlen ist (vgl. Kapitel 3.2 des Skriptes): $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx \frac{1}{2}$ sowie $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \approx \frac{1}{3}$.

Hiermit erhält man für die nach dem Neumann-Verfahren erzeugten Zufallszahlen

$$\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i = 0{,}37 \neq \frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 0{,}23 \neq \frac{1}{3}$$

und für die mit der multiplikativen Kongruenzmethode erzeugten Zufallszahlen

$$\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} y_i = 0{,}66 \neq \frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 0{,}53 \neq \frac{1}{3}.$$

Somit kann mit dem einfachen Test auf gleichverteilte Zufallszahlen noch keine begründete Entscheidung für ein Verfahren gefällt werden, was in der zu kleinen Grundgesamtheit von 15 Zahlen begründet sein mag.