Aufgabe B0403

Der Kekshersteller Königsrolle hat den neuen Tripelkeks zur Marktreife gebracht und möchte diesen nun neben seinem traditionellen Doppelkeks produzieren.

Die Herstellung der Kekse erfolgt auf den drei Maschinen A, B und C. In Maschine A werden die Einzelkekse gepresst. Für die zwei Kekse eines Doppelkekses benötigt die Maschine 2 Zeiteinheiten (ZE) und für die drei Kekse eines Tripelkekses 3 ZE. Das Zusammenlegen der Kekse mit Schokolade in Maschine B dauert für Doppelkekse 4 ZE und für Tripelkekse 8 ZE. Das Verpacken der Kekse in Maschine C dauert für beide Produkte jeweils 1 ZE. Maschine A steht täglich für 54 ZE, Maschine B für 128 ZE und Maschine C für 25 ZE zur Verfügung. Ein Doppelkeks lässt sich für 3 Geldeinheiten (GE) verkaufen und ein Tripelkeks aufgrund seiner Neuheit für 5 GE.

Das Unternehmen Königsrolle ist an einer Ertragmaximierung für die gemeinsame Produktion von Doppel- und Tripelkeksen interessiert.

a) Stellen Sie einen linearen Planungsansatz auf.

b) Ermitteln Sie die optimale Lösung grafisch.

c) Stellen Sie ein zulässiges Ausgangstableau für das vorliegende Optimierungsproblem auf.

Bei der Optimierung der Keksproduktion ergab sich folgendes Endtableau:

BV	x_D	x_T	s_A	s_B	s_C	RS
x_D	1		2	-0,75		12
x_T		1	-1	0,5		10
s_C			-1	0,25	1	3
$y_{0,j}$			1	0,25		86

d) Welche Maschinen sind voll ausgelastet?

e) Um welchen Betrag ändert sich jeweils der Ertrag, wenn die Kapazität in einer der drei Maschinen (A, B oder C) um eine ZE reduziert wird?

f) Quadrupelkekse erzielen auf dem Markt einen Preis von 7 GE und benötigen 4 ZE in Maschine A, 15 ZE in Maschine B und 3 ZE in Maschine C. Ist es ökonomisch sinnvoll, diese in das Produktionsprogramm aufzunehmen? Der negative Grenzertrag lässt sich wie folgt berechnen:

$0 = \Sigma y_{0,j}\, a_j^q$; wobei $y_{0,j}$ die Zielfunktionskoeffizienten und a_j^q die benötigten Zeiteinheiten der Maschine *j* sind.

Lösungshinweise

Bezeichne im Folgenden x_D die Anzahl der Doppelkekse und x_T die Anzahl der Tripelkekse.

a) Der lineare Planungsansatz für das vorliegende Problem lautet:

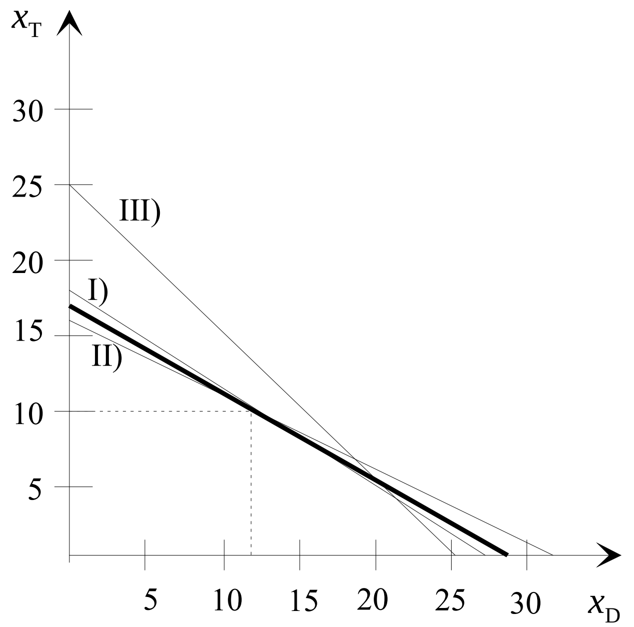
$$\max F(x_D, x_T) = 3x_D + 5x_T$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_D & + & 3x_T & \leq & 54 & \text{(I)} \\ 4x_D & + & 8x_T & \leq & 128 & \text{(II)} \\ x_D & + & x_T & \leq & 25 & \text{(III)} \end{array}$$

$$x_D, x_T \geq 0$$

b)



Die Zielfunktion ist dick markiert. Die optimale Lösung lautet:

$x_D = 12$ und $x_T = 10$ mit einem Zielfunktionswert von z = 86.

c) Fügt man die Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) in ein Simplextableau ein, so erhält man das folgende zulässige Ausgangstableau:

BV	x_D	x_T	s_A	s_B	s_C	RS
y_A	2	3	1			54
y_B	4	8		1		128
y_C	1	1			1	25
$y_{0,j}$	-3	-5				

Das optimale Tableau ist:

BV	x_D	x_T	s_A	s_B	s_C	RS
x_D	1		2	-0,75		12
x_T		1	-1	0,5		10
s_C			-1	0,25	1	3
$y_{0,j}$			1	0,25		86

d) Maschinen A und B (s_A und s_B) sind voll ausgelastet. Ihnen wird im Optimaltableau der Wert „0“ zugewiesen. Maschine C (s_C) ist in der Basis und verfügt über eine Restkapazität von 3 ZE, ist also nicht voll ausgelastet.

e) Maschine C ist nicht voll ausgelastet. Wird hier die Kapazität nicht um mehr als 3 ZE reduziert, ändert sich die Lösung nicht.

Maschine A ist voll ausgelastet. Daher wird der Nicht-Basisvariablen y_A im Optimaltableau der Wert „0“ zugewiesen. Soll nun die Kapazität um eine ZE reduziert werden, bedeutet dies, dass y_A auf „1“ gesetzt wird. Dies bedeutet dann für das Optimaltableau:

1. Zeile: $x_D + 2s_A - 0{,}75s_B = 12$ mit $s_A = 1, s_B = 0 \Rightarrow x_D + 2 = 12 \Leftrightarrow x_D = 10$

2. Zeile: $x_T - s_A + 0{,}5s_B = 10$ mit $s_A = 1, s_B = 0 \Rightarrow x_T - 1 = 10 \Leftrightarrow x_T = 11$

3. Zeile: $-1s_A + 0{,}25s_B + s_C = 3$ mit $s_A = 1, s_B = 0 \Rightarrow -1 + s_C = 3 \Leftrightarrow s_C = 4$

Zielfunktionszeile: $y_{0,j} + 1s_A + 0{,}25s_B = 86$ mit $s_A = 1, s_B = 0$
$\Rightarrow y_{0,j} + 1 = 86 \Leftrightarrow z = 85$

Diese Änderungen lassen sich im Tableau wie folgt verdeutlichen:

BV	x_D	x_T	s_A	s_B	s_C	RS
x_D	1		2	-0,75		12 - 2
x_T		1	-1	0,5		10 + 1
s_C			-1	0,25	1	3 + 1
$y_{0,j}$			1	0,25		86 - 1

Der Gewinn sinkt also um eine GE.

Entsprechend hat eine Kapazitätsreduktion in Maschine B um eine ZE (y_B=1) folgende Auswirkungen auf das Tableau:

BV	x_D	x_T	s_A	s_B	s_C	RS
x_D	1		2	-0,75		12 + 0,75
x_T		1	-1	0,5		10 – 0,5
s_C			-1	0,25	1	3 – 0,25
$y_{0,j}$			1	0,25		86 – 0,25

Der Gewinn sinkt hier um 0,25 GE.

f) Quadrupelkekse bringen auf dem Markt einen Umsatz von 7 GE. Es ist also ökonomisch sinnvoll, diese zu produzieren, wenn ihre Aufnahme in das Produktionsprogramm negative Grenzertrag (*O*) von weniger als 7 GE verursacht. Diesen negativen Grenzertrag berechnet man nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 0 &= 1s_A + 0{,}25s_B + 0s_C \\ &= 1 \cdot 4 + 0{,}25 \cdot 15 \\ &= 7{,}75 \end{aligned}$$

Wegen 7,75 > 7 ist es ökonomisch nicht sinnvoll, Quadrupelkekse herzustellen.

✓