Aufgabe B0803

Gegeben sei das LOP

$$\text{Max} \quad x_0 = x_1 + x_2$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcccccclcl}
x_1 + & 3x_2 + & x_3 & & & & = & 9 + \lambda v_1 & & (1) \\
2x_1 + & x_2 & & + x_4 & & & = & 8 + \lambda v_2 & & (2) \\
x_1 & & & & + x_5 & & = & 4 + \lambda v_3 & & (3) \\
& x_2 & & & & + x_6 & = & \frac{5}{2} + \lambda v_4 & & (4) \\
& & & & & x_1, \ldots, x_6 & \geq & 0 & &
\end{array}$$

Lösen Sie dieses lineare Programm für $\lambda = 0$.

Geben Sie für $\mathbf{v} = (1, 2, 1, \frac{9}{5})^{\mathsf{T}}$ und für $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)^{\mathsf{T}}$ die kritischen Intervalle für λ an.

Interpretieren Sie das kritische Intervall im zweiten Fall geometrisch.

Lösungshinweise

Für $\lambda = 0$ liefert die Simplexmethode folgende Tableaus:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_0	1	-1	-1	0	0	0	0	0
x_3	0	1	3	1	0	0	0	9
x_4	0	*2	1	0	1	0	0	8
x_5	0	1	0	0	0	1	0	4
x_6	0	0	1	0	0	0	1	5/2

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_0	1	0	-1/2	0	1/2	0	0	4
x_3	0	0	*5/2	1	-1/2	0	0	5
x_1	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4
x_5	0	0	-1/2	0	-1/2	1	0	0
x_6	0	0	1	0	0	0	1	5/2

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_0	1	0	0	1/5	2/5	0	0	5
x_2	0	0	1	2/5	-1/5	0	0	2
x_1	0	1	0	-1/5	3/5	0	0	3
x_5	0	0	0	1/5	-3/5	1	0	1
x_6	0	0	0	-2/5	1/5	0	1	1/2

T.1

Die optimale Lösung lautet also $(x_1,\ldots,x_6) = \left(\underline{3},\underline{2},0,0,\underline{1},\underline{\frac{1}{2}}\right)$.

Da die Basisinverse zum optimalen Tableau in den Spalten $x_3,\ldots,x_6$ von **T.1** steht, ist

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} v_1 - \frac{1}{5} v_2 \\ -\frac{1}{5} v_1 + \frac{3}{5} v_2 \\ \frac{1}{5} v_1 - \frac{3}{5} v_2 + v_3 \\ -\frac{2}{5} v_1 + \frac{1}{5} v_2 + v_4 \end{pmatrix}.$$

i) Für $\mathbf{v} = (1,2,1,\frac{9}{5})^T$ ergibt sich $\tilde{\mathbf{v}} = (0,1,0,\frac{9}{5})^T$ und somit

$$\lambda_{Max} = \infty,\ \lambda_{Min} = \mathrm{Max}\left\{-\frac{3}{1}, -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{5}}\right\} = -\frac{5}{18}.$$

ii) Für $\mathbf{v} = (1,0,0,0)^T$ ergibt sich $\tilde{\mathbf{v}} = (\frac{2}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{5},-\frac{2}{5})^T$. Die Grenzen des kritischen Intervalls für λ sind also

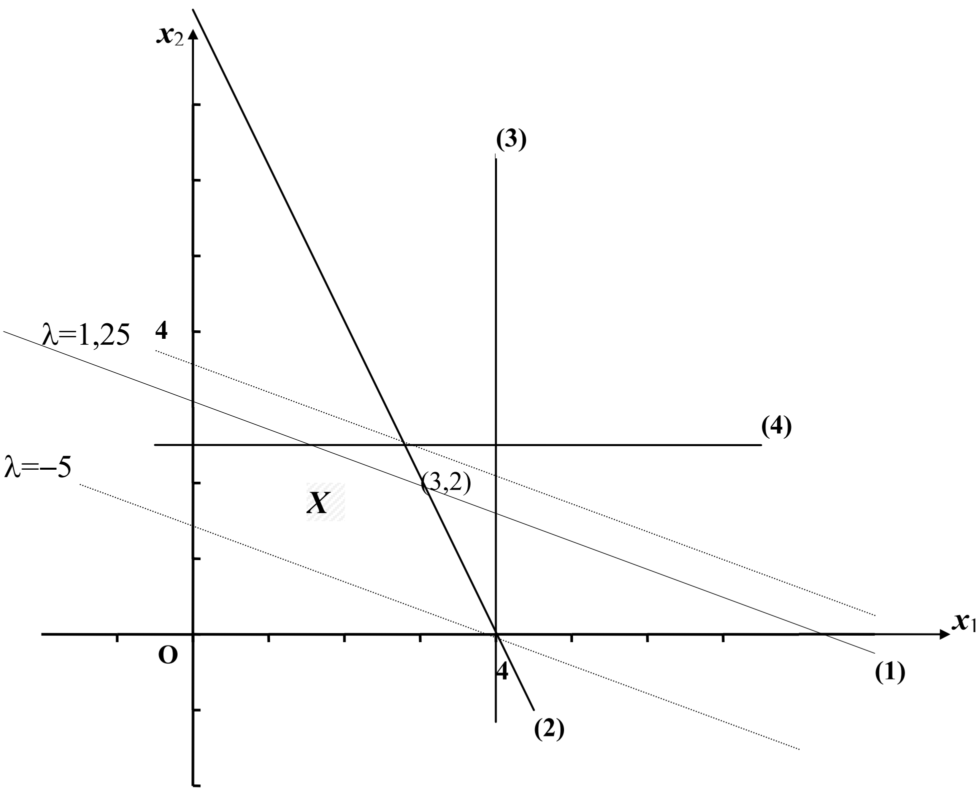
$$\lambda_{Max} = \text{Min}\left\{-\frac{3}{-\frac{1}{5}},-\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{2}{5}}\right\} = \frac{5}{4}, \lambda_{Min} = \text{Max}\left\{-\frac{2}{\frac{2}{5}},-\frac{1}{\frac{1}{5}}\right\} = -5\,.$$

Geometrisch bewirkt die Veränderung von λ eine Verschiebung der Restriktionsgeraden

$x_1 + 3x_2 \leq 9 + \lambda$,

dem Rand des durch Ungleichung (1) beschriebenen Halbraums.

Für $\lambda = \lambda_{Min} = -5$ geht die Restriktionsgerade durch den Schnittpunkt der Restriktionsgeraden (2) und (3); für $\lambda = \lambda_{Max} = \frac{5}{4}$ läuft sie durch den Schnittpunkt der Restriktionsgeraden (2) und (4). Die folgende Abbildung fasst dies zusammen.



✓