Aufgabe B0101

Die Jahresproduktion zweier kontinuierlicher Güter x_1 und x_2 soll outputmaximal geplant werden. Neben der Mengenbeschränkung in Höhe von 500.000 in einem Produktionsfaktor (Stückverzehre 14 und 25 für x_1 bzw. x_2) sind auch die Gesamtkosten zu berücksichtigen. Die variablen Stückkosten setzen sich aus dem Einsatz des Produktionsfaktors (2,35 € je Einheit) sowie 43 € und 14 € für anteilige Gemeinkosten je produzierter Mengeneinheit x_1 bzw. x_2 zusammen. Zusätzlich entstehen beschäftigungsabhängige Fixkosten für das 12-monatige Leasen einer Maschine mit geeigneter Kapazität für die gesamte Ausbringungsmenge. Folgende Maschinen stehen zur Auswahl.

Typ	**Jahreskapazität**	**Jahresleasingkosten**
M17	17.000	260.000 €
M21	21.000	295.000 €
M-XL	22.500	308.000 €
V4 A.C.	23.800	314.000 €
M30	26.000	335.000 €

Stellen Sie ein entsprechendes Optimierungsmodell auf, wenn die Jahresgesamtkosten auf 2 Mio. € beschränkt sind!

Lösungshinweise

Vorüberlegungen

Variable Stückkosten für x_1: 14 * 2,35 € + 43 € = 75,90 €,

variable Stückkosten für x_2: 25 * 2,35 € + 14 € = 72,75 €.

Die Fixkosten sind interpretierbar als sprungfixe Kosten an den Stellen 0, 17.000, 21.000, 22.500 und 23.800, welche jeweilige zusätzliche Kostensprünge von 260.000 €, (295.000 € - 260.000 € =) 35.000 €, 13.000 €, 6.000 € bzw. 21.000 € bewirken.

Eine obere Schranke für die Beschäftigung ist

$\max\{x_1+x_2 \mid 14\, x_1 + 25\, x_2 \leq 500.000\} = 35.714$

im Modell verwenden wir die größere Schranke 40.000 .

$\text{Max } x_0 = x_1 + x_2$ (Outputmaximierung)

u.d.N.

$14\, x_1 + 25\, x_2 \leq 500.000$ (Mengenrestriktion des Produktionsfaktors)

$75{,}9\, x_1 + 72{,}75\, x_2 + 260.000\, y_1$
$+ 35.000\, y_2 + 13.000\, y_3 + 6.000\, y_4 + 21.000\, y_5 \leq 2.000.000$
(gesamte Kosten)

$x_1 + x_2 \leq 40.000\, y_1$ (y_1=1 bei Produktion über 0)
$x_1 + x_2 - 17.000 \leq 40.000\, y_2$ (y_2=1 bei Produktion über 17.000)
$x_1 + x_2 - 21.000 \leq 40.000\, y_3$ (etc.)
$x_1 + x_2 - 22.500 \leq 40.000\, y_4$
$x_1 + x_2 - 23.800 \leq 40.000\, y_5$
$x_1 + x_2 \leq 26.000$ (Kapazitätsgrenze der größten Maschine)
$x_1, x_2 \geq 0$
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 binär .

Übrigens ergibt sich als Lösung (etwa mittels der Software LINDO):

$x_0 = 22.890{,}79$, $x_1 = 6.569{,}96$, $x_2 = 16.320{,}82$ sowie $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$, $y_5 = 0$, d.h. vier Kostensprünge werden akzeptiert und es wird damit die vierte Maschine „V4 A.C." geleast.