Aufgabe B0502

Zu einem Überdeckungsproblem sind die folgende Matrix A sowie der Kostenvektor c^T gegeben.

$$
\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
c^T = \begin{pmatrix} 61 & 96 & 90 & 69 & 47 & 38 & 49 & 59 & 45 & 85 & 52 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe: Reduzieren Sie das Problem soweit wie möglich mittels einschlägiger Reduktionsregeln und geben Sie die optimale Lösung an!

Damit Ihre Reduktionen nachvollziehbar sind, nennen Sie bitte in Reihenfolge der Anwendung die jeweils benutzte Regel sowie die sich ergebenden Konsequenzen (Streichung Zeile/Spalte, $x_j = 0$ oder $x_j = 1$).

Lösungshinweise

Die im Folgenden angegebenen Reduktionsregeln finden Sie unter den benutzten Abkürzungen in Abschnitt 5.1 des Kurstextes.

R4Ü: $a_{i1} \leq a_{i6}$ und $c_1 \geq c_6 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
R4Ü: $a_{i2} \leq a_{i6} + a_{i7}$ und $c_2 \geq c_6 + c_7 \;\Rightarrow\; x_2 = 0$
R4Ü: $a_{i3} \leq a_{i6} + a_{i7}$ und $c_3 \geq c_6 + c_7 \;\Rightarrow\; x_3 = 0$
R4Ü: $a_{i5} \leq a_{i6}$ und $c_5 \geq c_6 \;\Rightarrow\; x_5 = 0$
R4Ü: $a_{i8} \leq a_{i7}$ und $c_8 \geq c_7 \;\Rightarrow\; x_8 = 0$
R4Ü: $a_{i10} \leq a_{i6} + a_{i9}$ und $c_{10} \geq c_6 + c_9 \;\Rightarrow\; x_{10} = 0$
R4Ü: $a_{i11} \leq a_{i7}$ und $c_{11} \geq c_7 \;\Rightarrow\; x_{11} = 0$

Es verbleibt das folgende Tableau.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_4 & x_6 & x_7 & x_9 \end{pmatrix} \\ A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ c^T = \begin{pmatrix} 69 & 38 & 49 & 45 \end{pmatrix} \end{array}$$

R2: für x_6 in Zeile 5 $\Rightarrow$ $x_6 = 1$; streiche Spalte zu x_6 sowie die Zeilen 1, 2, 3, 5, 7 und 8

Es verbleibt das folgende Tableau.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_4 & x_7 & x_9 \end{pmatrix} \\ A'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ c^T = \begin{pmatrix} 69 & 49 & 45 \end{pmatrix} \end{array}$$

R4Ü: $a_{i4} \leq a_{i7}$ und $c_4 \geq c_7 \;\Rightarrow\; x_4 = 0 \qquad \Rightarrow$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_7 & x_9 \end{pmatrix} \\ A''' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ c^T = \begin{pmatrix} 49 & 45 \end{pmatrix} \end{array}$$

R2: für x_7 in letzter Zeile $\Rightarrow$ $x_7 = 1$; streiche Spalte zu x_7 sowie beide Zeilen.

Das verbleibende Tableau ist leer, das Überdeckungsproblem also *vollständig reduziert*.

Die optimale Lösung ist

$x^T = (0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0)$ mit Gesamtkosten von $z^{\text{opt}} = c_6 + c_7 = 38 + 49 = 87$.