Aufgabe B0302

Gegeben sei ein LVMP mit

$$C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = 20 \quad .$$

Aufgabe: Stellen Sie ein *Kompromissmodell bei vorgegebenem Zielwertvektor* auf. Hierzu soll der ideale Zielwertvektor herangezogen werden, indem als Präferenzfunktion $\varphi\big(w(x)\big)$ die maximale, relative Abweichung vom jeweiligen individuellen Maximum $\hat{z}_q$ über die drei Zielfunktionen minimiert wird.

Relativieren Sie die jeweiligen Abweichungen mittels der Gewichte $\lambda_1 = \frac{1}{5},\ \lambda_2 = \frac{1}{8},\ \lambda_3 = \frac{50}{\hat{z}_3}$.

Um sicherzustellen, dass im Falle einer Mehrfachlösung eine optimale Lösung generiert wird, die zugleich funktional-effiziente Lösung des LVMPs ist, addieren Sie zur Zielfunktion einen geeigneten Term mit $\varepsilon = \frac{1}{100}$ in der dortigen, bekannten Formulierung.

Lösungshinweise

Aufzustellen ist das Kompromissprogramm (3.5) des Kurses:

$$\begin{aligned}
&\min \ v - \varepsilon \sum_{q=1}^{r} z_q(x) \\
&\text{u.d.N.} \\
&\quad x \in X \\
&\quad \lambda_q \, z_q(x) + v \geq \lambda_q \hat{z}_q \quad , \quad q = 1,\dots,r \\
&\quad v \geq 0
\end{aligned}$$

Offenbar ist $\hat{z}^T = (\ 20,\ 40,\ 100\ )$. Einsetzen ergibt sofort

$$\begin{aligned}
&\min \ v - \tfrac{1}{100}\left(x_1 + x_2 + x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 3x_2 + 5x_3\right) \\
&\text{u.d.N.} \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\
&\quad \tfrac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3) + v \geq \tfrac{1}{5} \cdot 20 \\
&\quad \tfrac{1}{8}\left(2x_1 + 2x_2\right) + v \geq \tfrac{1}{8} \cdot 40 \\
&\quad \tfrac{50}{100}\left(3x_2 + 5x_3\right) + v \geq \tfrac{50}{100} \cdot 100 \\
&\quad x_j, v \geq 0 \quad , \quad j = 1,\dots,3
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\min \ v - \tfrac{3}{100}x_1 - \tfrac{3}{50}x_2 - \tfrac{3}{50}x_3 \\
&\text{u.d.N.} \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\
&\quad \tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 + v \geq 4 \\
&\quad \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + v \geq 5 \\
&\quad \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{5}{2}x_3 + v \geq 50 \\
&\quad x_j, v \geq 0 \quad , \quad j = 1,\dots,3
\end{aligned}$$

✓