Aufgabe B0201 (X/N)

Markieren Sie wahre Aussagen:

A) Die Eigenwerte einer Matrix sind Wurzeln des charakteristischen Polynoms der Matrix.
B) Jede Matrix hat mindestens zwei Eigenwerte.
C) Eigenwerte symmetrischer Matrizen sind reelle Zahlen.
D) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Matrix sind orthogonal.
E) Zu jeder symmetrischen Matrix gibt es eine orthonormale Basis von Eigenvektoren.
F) Keine der Alternativen A – E ist richtig.

Lösungshinweise

Die Aussagen A, C und E sind richtig.

zu A: Die Eigenwerte einer Matrix sind Wurzeln des charakteristischen Polynoms der Matrix; vgl. Bemerkung nach (11.1.3).

zu B: Gegenbeispiel:

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ besitzt nur den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ denn es gilt:

$$\left|\mathbf{A} - \lambda I_3\right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(4-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2\,.$$

zu C: Eigenwerte symmetrischer Matrizen sind reelle Zahlen, vgl. Satz 11.1.1

zu D: Die Aussage ist falsch: sie gilt nur bei symmetrischen Matrizen.

zu E: Zu jeder symmetrischen Matrix gibt es eine orthonormale Basis von Eigenvektoren, vgl. Satz 11.1.3.