Aufgabe B0204 (X/N)

Bestimmen Sie wahre Aussagen.

A) 1 ist der Eigenwert jeder Einheitsmatrix.

B) Eine Nullmatrix hat keine Eigenwerte.

C) Zu jeder symmetrischen Matrix gibt es Eigenwerte.

D) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix sind orthogonal.

E) Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix haben die Länge 1.

F) Keine der Aussagen A) bis E) ist richtig.

Lösungshinweise

Lösung: A), C), D)

A) ist richtig. Bezeichnet $\mathbf{I}^{(n)}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix, so errechnen sich ihre Eigenwerte aus den Nullstellen des charakteristischen Polynom

$\left|\mathbf{I}^{(n)} - \lambda \cdot \mathbf{I}^{(n)}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)^n$. Somit ist $\lambda = 1$ einziger Eigenwert.

B) ist falsch. Bezeichnet $\mathbf{0}^{(n)}$ die n-dimensionale Nullmatrix, so errechnen sich ihre Eigenwerte an den Nullstellen des charakteristischen Polynom

$\left|\mathbf{0}^{(n)} - \lambda \mathbf{I}^{(n)}\right| = (-\lambda)^n$. $\lambda = 0$ ist somit Eigenwert.

C) ist richtig, da Eigenwerte von symmetrischen Matrizen reell sind (vgl. Satz 2.1.1).

D) ist richtig, vgl. Satz 2.1.2.

E) ist falsch, da zum Beispiel die symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ nur den Eigenwert 2 besitzt und der Eigenvektor somit gleich dem Nullvektor ist.