Klausurrepetitorium ABWL
„Planungs- und Entscheidungstechniken“

Südwestfälische Industrie- und Handelskammer

19. August 2005

Dr. Friedhelm Kulmann, Sandra Rudolph

Gliederung

1. Nichtlineare Optimierungsprobleme

- Viele betriebswirtschaftlichen Fragestellungen führen zur Optimierung nichtlinearer Probleme (bspw. optimales Portfolio, optimales Werbeprogramm unter Berücksichtigung nichtlinearer Werberesponsefunktionen etc.)
- Besonderheit: Lineare Funktionen in den Nebenbedingungen
- Versuch der Lösung dieser Probleme mit bekannten Verfahren (Simplex-Verfahren)

  $\Rightarrow$ Transformation der nichtlinearen Zielfunktion in eine lineare
- Anwendung des Lösungsverfahrens auf das (Hilfs)problem
- Ggfs. Übertragung der Lösung des Hilfsproblems auf das Ausgangsproblem

1.1 Quadratisches Programm

Exkurs: Bestimmung der Extrema mit Hilfe der Lagrange-Methode (1)

Gegeben: Nichtlineares Optimierungsproblem mit Gleichungen als Restriktionen

$$\max/\min f(x_1, ..., x_n)$$

$$\text{u.d.N.}$$

$$g_1(x_1, ..., x_n) = b_1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$g_m(x_1, ..., x_n) = b_m$$

Lagrangefunktion von *f* unter Nebenbedingungen:

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) =$$

$$f(x_1, ..., x_n) + \lambda_1(g_1(x_1, ..., x_n) - b_1) + ... + \lambda_m(g_m(x_1, .., x_n) - b_m)$$

1.1 Quadratisches Programm

Exkurs: Bestimmung der Extrema mit Hilfe der Lagrange-Methode (2)

Bestimmung der kritischen Punkte

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1} = 0 \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_n} = 0 \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1,\ldots,x_n) - b_i = 0 \qquad i = 1,\ldots,m$$

1.1 Quadratisches Programm

Exkurs: Bestimmung der Extrema mit Hilfe der Lagrange-Methode (3)

Gegeben: Zielfunktion und Gleichungen in den Nebenbedingungen

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2$$

u.d.N.

$$g(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 = 6$$

Lagrangefunktion von *f* unter Nebenbedingung:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 + \lambda(3x_1 + 2x_2 - 6)$$

Partielle Ableitungen gleich Null setzen:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 8 + 3\lambda = 0 \Rightarrow x_1^{(0)} = 4 - \frac{3}{2}\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 10 + 2\lambda = 0 \Rightarrow x_2^{(0)} = 5 - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x_1 + 2x_2 - 6 = 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Exkurs: Bestimmung der Extrema mit Hilfe der Lagrange-Methode (4)

Beispiel (Fortführung)

Einsetzen von $x_1^{(0)}$ und $x_2^{(0)}$ in die Restriktionen

$$3(4-\frac{3}{2}\lambda)+2(5-\lambda)-6=0$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{32}{13}$$

Lösung:

$$(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\lambda)^T=\left(\frac{4}{13},\frac{33}{13},\frac{32}{13}\right)^T$$

mit $f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})=-\frac{3601}{169}=-21,3$

Kritischer Punkt:

$$(x_1^{(0)},x_2^{(0)})^T=\left(\frac{4}{13},\frac{33}{13}\right)^T$$

1.1 Quadratisches Programm

Exkurs: Bestimmung der Extrema mit Hilfe der Lagrange-Methode (4)

Interpretation des Lagrange-Multiplikators: Schattenpreis

Der Lagrange-Multiplikator λ_i gibt an, um wieviel sich der Zielfunktionswert ändert, wenn sich b_i um eine Einheit ändert.

Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2$$

u.d.N.

$$g(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 = 5$$

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = -\frac{3601}{169} + \frac{32}{13} = -\frac{3185}{169} = -18{,}84$$

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (1)

Gegeben: Nichtlineares Optimierungsproblem mit Ungleichungen als Restriktionen und nichtnegativen Variablen – 1-dimensionaler Fall

$$\min \ f(x) = x^2 - 8x$$

u.d.N.

$$x \leq 3$$

$$x \geq 0$$

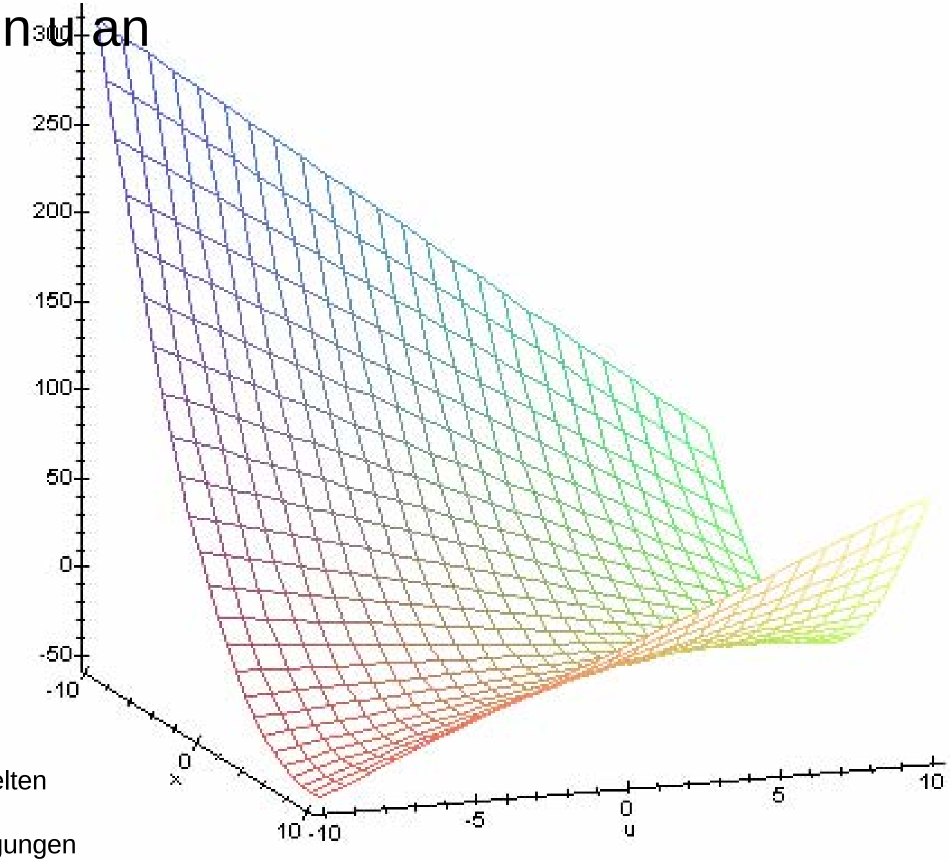
1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (2)

Lagrangefunktion von *f* unter Nebenbedingung (*u* bezeichnet den Multiplikator):

$$L(x,u) = x^2 - 8x + u(x-3)$$

Die Lagrangefunktion nimmt im Sattelpunkt ihr Minimum in x und ihr Maximum in u an



Anm.: Die Ausführungen gelten für reguläre Probleme, d.h. gewisse Regularitätsbedingungen müssen erfüllt sein (s. Kurs 854)

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (3)

Lagrangefunktion nimmt im Sattelpunkt ihr Minimum in x und ihr Maximum in u an

Da Nichtnegativitätsbedingung für x gegeben, ist partielle Ableitung >= bzw. <= Null

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 8 + u \geq 0 \Leftrightarrow -2x + 8 - u \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = x - 3 \leq 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (4)

Gegeben: Nichtlineares Optimierungsproblem mit Ungleichungen als Restriktionen und nichtnegativen Variablen – 2-dim. Fall

$$\min\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2$$

u.d.N.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (5)

Lagrangefunktion von *f* unter Nebenbedingung (*u* bezeichnet den Multiplikator):

$$L(x_1, x_2, u) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 + u(3x_1 + 2x_2 - 6)$$

Minimum der Langrangefunktion (unter Berücksichtigung der NNB) in x gegeben, wenn partielle Ableitungen nach x_j >= Null und nach u <= Null

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 8 + 3u \geq 0 \Leftrightarrow -2x_1 + 8 - 3u \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 10 + 2u \geq 0 \Leftrightarrow -2x_2 + 10 - 2u \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 3x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (6)

Um die optimale Lösung zu bestimmen, führen wir Schlupfvariable v_j und s ein, um Ungleichungen in Gleichungen zu überführen

Bedingungen:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 8 - 3u + v_1 = 0 \Leftrightarrow -2x_1 - 3u + v_1 = -8$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 10 - 2u + v_2 = 0 \Leftrightarrow -2x_2 - 2u + v_2 = -10$$

$$3x_1 + 2x_2 + s = 6$$

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (7)

Einschub: Zusammenhang mit (5.7)?

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 \cdot 1 \cdot x_1 \qquad -3u + v_1 = -8 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = H$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \qquad -2 \cdot 1 \cdot x_2 \qquad -2u + v_2 = -10 \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = A^T$$

$$3x_1 + 2x_2 + s = 6$$

$$\text{i) -2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } 3x_1 + 2x_2 + s = 6$$

$$\text{iii) } x_1, x_2, v_1, v_2, s \geq 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (8)

Ermittlung einer zulässigen Basislösung I

x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	RHS
-2	0	-3	1	0	0	-8
0	-2	-2	0	1	0	-10
3	2	0	0	0	1	6

x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	RHS
2	0	3	-1	0	0	8
0	2	2	0	-1	0	10
3	2	0	0	0	1	6

⇨ Keine vollständige Einheitsbasis, daher Einführung von Hilfsvariable z_j

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (9)

Ermittlung einer zulässigen Basislösung II

x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	z_1	z_2	RHS
-2	0	-3	1	0	0	-1	0	-8
0	-2	-2	0	1	0	0	-1	-10
3	2	0	0	0	1	0	0	6

x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	z_1	z_2	RHS
2	0	3	-1	0	0	1	0	8
0	2	2	0	-1	0	0	1	10
3	2	0	0	0	1	0	0	6

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (10)

Modifizierte KKT-Bedingungen nach Einführung der Hilfsvariable

$$\text{i) -2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}z_1-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}z_2=\begin{pmatrix}-8\\ -10\end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } 3x_1+2x_2+s=6$$

$$\text{iii) } x_1,x_2,v_1,v_2,s\geq 0$$

Zu lösendes Hilfsproblem zur Bestimmung einer zulässigen Basislösung mittels 2-Phasen-Simplex

$$\min\ Z=z_1+z_2$$

u.d.N.

$$\text{i) -2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}z_1-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}z_2=\begin{pmatrix}-8\\ -10\end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } 3x_1+2x_2+s=6$$

$$\text{iii) } x_1,x_2,v_1,v_2,s\geq 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (11)

$$\min\ Z = z_1 + z_2$$

u.d.N.

$$\text{i) } -2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}u + \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}z_1 - \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}z_2 = \begin{pmatrix}-8\\ -10\end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } 3x_1 + 2x_2 + s = 6$$

$$\text{iii) } x_1, x_2, v_1, v_2, s \geq 0$$

u und s, v_1 und x_1 sowie v_2 und x_2 sind zueinander komplementäre Variable, daher dürfen sie nicht zusammen in die Basis.
Aufgrund dessen vierte Bedingung:

$$\text{iv) } v_1 \cdot x_1 = 0, v_2 \cdot x_2 = 0, s \cdot u = 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (12)

Beginn 1.Phase (II) und (III) mit (-1) multipliziert

x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	z_1	z_2	RHS
0	0	0	0	0	0	1	1	0
-2	0	-3	1	0	0	-1	0	-8
0	-2	-2	0	1	0	0	-1	-10
3	2	0	0	0	1	0	0	6

x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	z_1	z_2	RHS
0	0	0	0	0	0	1	1	0
2	0	3	-1	0	0	1	0	8
0	2	2	0	-1	0	0	1	10
3	2	0	0	0	1	0	0	6

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (13)

Subtraktion von (II) und (III) von (I)

	x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	z_1	z_2	RHS
	-2	-2	-5	1	1	0	0	0	-18
z_1	2	0	3	-1	0	0	1	0	8
z_2	0	2	2	0	-1	0	0	1	10
s	3	2	0	0	0	1	0	0	6

Weil s in der Basis ist, darf u nicht aufgenommen werden, daher x_1 oder x_2

$$\text{iv)}\ v_1 \cdot x_1 = 0, v_2 \cdot x_2 = 0, s \cdot u = 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (14)

	x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	z_1	z_2	RHS
	-2	-2	-5	1	1	0	0	0	-18
z_1	2	0	3	-1	0	0	1	0	8
z_2	0	2	2	0	-1	0	0	1	10
s	3	2	0	0	0	1	0	0	6

	x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	z_1	z_2	RHS
	1	0	-5	1	1	1	0	0	-18
z_1	2	0	3	-1	0	0	1	0	8
z_2	-3	0	2	0	-1	-1	0	1	4
x_2	3/2	1	0	0	0	1/2	0	0	3

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (15)

	x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	z_1	z_2	RHS
	1	0	-5	1	1	1	0	0	-18
z_1	2	0	3	-1	0	0	1	0	8
z_2	-3	0	2	0	-1	-1	0	1	4
x_2	3/2	1	0	0	0	½	0	0	3

	x_1	x_2	u	v_1	v_2	S	z_1	z_2	RHS
	-13/2	0	0	1	-3/2	-3/2	0	5/3	-18
z_1	13/2	0	0	-1	3/2	3/2	1	-3/2	8
u	-3/2	0	1	0	-1/2	-1/2	0	1/2	2
x_2	3/2	1	0	0	0	½	0	0	3

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (16)

	x_1	x_2	u	v_1	v_2	S	z_1	z_2	RHS
	-13/2	0	0	1	-3/2	-3/2	0	5/3	-18
z_1	13/2	0	0	-1	3/2	3/2	1	-3/2	8
u	-3/2	0	1	0	-1/2	-1/2	0	1/2	2
x_2	3/2	1	0	0	0	½	0	0	3

	x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	z_1	z_2	RHS
	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	0	-2/13	3/13	3/13	2/13	-3/13	4/13
u	0	0	1	-3/13	-2/13	-2/13	3/13	2/13	32/13
x_2	0	1	0	3/13	-9/26	2/13	-3/13	-9/26	33/13

1.1 Quadratisches Programm

Bestimmung der Extrema mit Hilfe der KKT-Bedingungen (17)

	x_1	x_2	u	v_1	v_2	s	z_1	z_2	RHS
	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	0	-2/13	3/13	3/13	2/13	-3/13	4/13
u	0	0	1	-3/13	-2/13	-2/13	3/13	2/13	32/13
x_2	0	1	0	3/13	-9/26	2/13	-3/13	-9/26	33/13

1. Phase abgeschlossen, d.h. zulässige Basislösung gefunden:

$$(x_1, x_2)^T = \left(\frac{4}{13}, \frac{33}{13}\right)^T \quad \text{mit } f(x_1, x_2) = -\frac{3601}{169} = -21{,}3$$

$$\text{i) } -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/13 \\ 33/13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} 32/13 = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

✓

$$\text{ii) } 3 \cdot 4/13 + 2 \cdot 33/13 = 6$$

✓

$$\text{iii) } x_1, x_2, v_1, v_2, s \geq 0$$

$$\text{iv) } v_1 \cdot x_1 = 0, v_2 \cdot x_2 = 0, s \cdot u = 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Beispiel für Nulllösung als optimale Lösung (1)

Gegeben: Nichtlineares Optimierungsproblem mit Ungleichungen als Restriktionen und nichtnegativen Variablen

$$\min\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{u.d.N.}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Beispiel für Nulllösung als optimale Lösung (2)

Lagrangefunktion:

$$L(x_1, x_2, u) = x_1^2 + x_2^2 + 8x_1 + 10x_2 + u(3x_1 + 2x_2 - 6)$$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 8 + 3u \geq 0 \Leftrightarrow -2x_1 - 8 - 3u \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 10 + 2u \geq 0 \Leftrightarrow -2x_2 - 10 - 2u \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 3x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0$$

1.1 Quadratisches Programm

Beispiel für Nulllösung als optimale Lösung (3)

Prüfung, ob für Nulllösung KKT-Bedingungen erfüllt sind
Wenn ja, dann ist Nulllösung optimale Lösung
Wenn nein, dann gehe vor wie ab Folie 18 beschrieben

i) $-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ ✓

ii) $3x_1 + 2x_2 + s = 6$ ✓

iii) $x_1, x_2, v_1, v_2, s \geq 0$

iv) $v_1 \cdot x_1 = 0, v_2 \cdot x_2 = 0, s \cdot u = 0$

Anmerkung: u ist gleich Null, weil die Kapazitäten nicht berührt werden und daher der Schattenpreis Null ist

1.1 Quadratisches Programm

Anmerkungen

Wie sehen die KKT-Bedingungen aus, wenn ein Maximierungs-problem vorliegt und kein Minimierungproblem? Warum?
[Fragen nicht klausurrelevant!]

1.2 Quotientenprogramm

Problemstellung

Betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme stellen sich häufig als Maximierung einer Verhältnisgröße dar; Zähler und Nenner sind dabei lineare Funktionen der Entscheidungsvariablen

$$\max q = \frac{c^T x + c_0}{d^T x + d_0} = \frac{z(x)}{n(x)}$$

u.d.N.

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

1.2 Quotientenprogramm

Beispiel

$$\max \ q = \frac{20x_1 + 15x_2}{5x_1 + 5x_2 + 20} = \frac{z(x)}{n(x)}$$

u.d.N.

$$4x_1 + x_2 \leq 17$$

$$7x_1 + 3x_2 \leq 31$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Einführung der Schlupfvariablen

$$\max \ q = \frac{20x_1 + 15x_2}{5x_1 + 5x_2 + 20} = \frac{z(x)}{n(x)}$$

u.d.N.

$$4x_1 + x_2 + s_1 = 17$$

$$7x_1 + 3x_2 + s_2 = 31$$

$$x_2 + s_3 = 8$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

1.2 Quotientenprogramm

1. Zulässige Ausgangslösung x* suchen

Da Konstante im Nenner $d_0>0$ ist, gilt für alle zulässigen Lösungen

$n(x) \neq 0$

Daher kann mit der Nullösung gestartet werden.

$$\left(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3\right) = \left(0, 0, 17, 31, 8\right)$$

1.2 Quotientenprogramm

2. Hilfsprogramm aufstellen und lösen

max $x_0=z(x)-q(x^*)n(x)$

$$q(x^*)=\frac{20\cdot 0+15\cdot 0}{5\cdot 0+5\cdot 0+20}=0$$

$$\max\ x_0=20x_1+15x_2-0\cdot(5x_1+5x_2+20)$$

u.d.N.

$$4x_1+x_2+s_1=17$$

$$7x_1+3x_2+s_2=31$$

$$x_2+s_3=8$$

$$x_1,x_2,s_1,s_2,s_3\geq 0$$

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
1	-20	-15	0	0	0	0
0	4	1	1	0	0	17
0	7	3	0	1	0	31
0	0	1	0	0	1	8

1.2 Quotientenprogramm

Lösung:

$$\left(x_0, x_1, x_2, s_1, s_2, s_3\right) = \left(140, 1, 8, 5, 0, 0\right)$$

$x_0 \neq 0$ ⇨ Setze x_0:=x* und gehe wieder zu 2.

$$q(x^*) = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 8}{5 \cdot 1 + +5 \cdot 12 + 20} = \frac{140}{65} = \frac{28}{13}$$

$$x_0 = 20x_1 + 15x_2 - \frac{28}{13} \cdot (5x_1 + 5x_2 + 20)$$

$$\max\ x_0 = \frac{120}{13} x_1 + \frac{55}{13} x_2 - \frac{560}{13}$$

u.d.N.

$$4x_1 + x_2 + s_1 = 17$$

$$7x_1 + 3x_2 + s_2 = 31$$

$$x_2 + s_3 = 8$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
1	-120/13	-55/13	0	0	0	-560/13
0	4	1	1	0	0	17
0	7	3	0	1	0	31
0	0	1	0	0	1	8

1.2 Quotientenprogramm

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
1	-120/13	-55/13	0	0	0	- 560/13
0	4	1	1	0	0	17
0	7	3	0	1	0	31
0	0	1	0	0	1	8

Lösung:

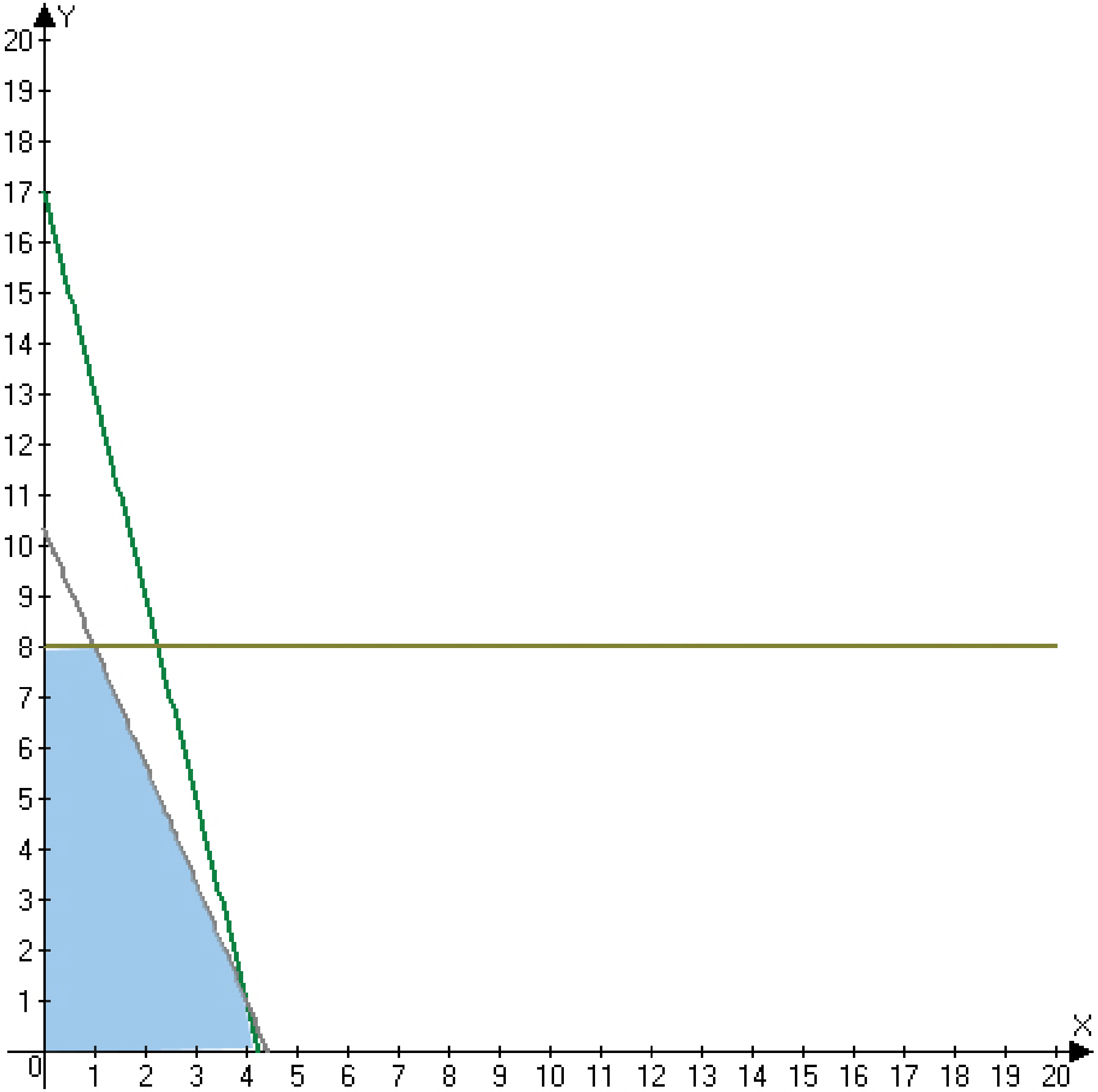
$$\left(x_0, x_1, x_2, s_1, s_2, s_3\right) = \left(0, 1, 8, 5, 0, 0\right)$$

$x_0 = 0$ ⇨ Optimale Lösung gefunden!

1.2 Quotientenprogramm

Idee des Verfahrens von Isbell und Marlow (1)

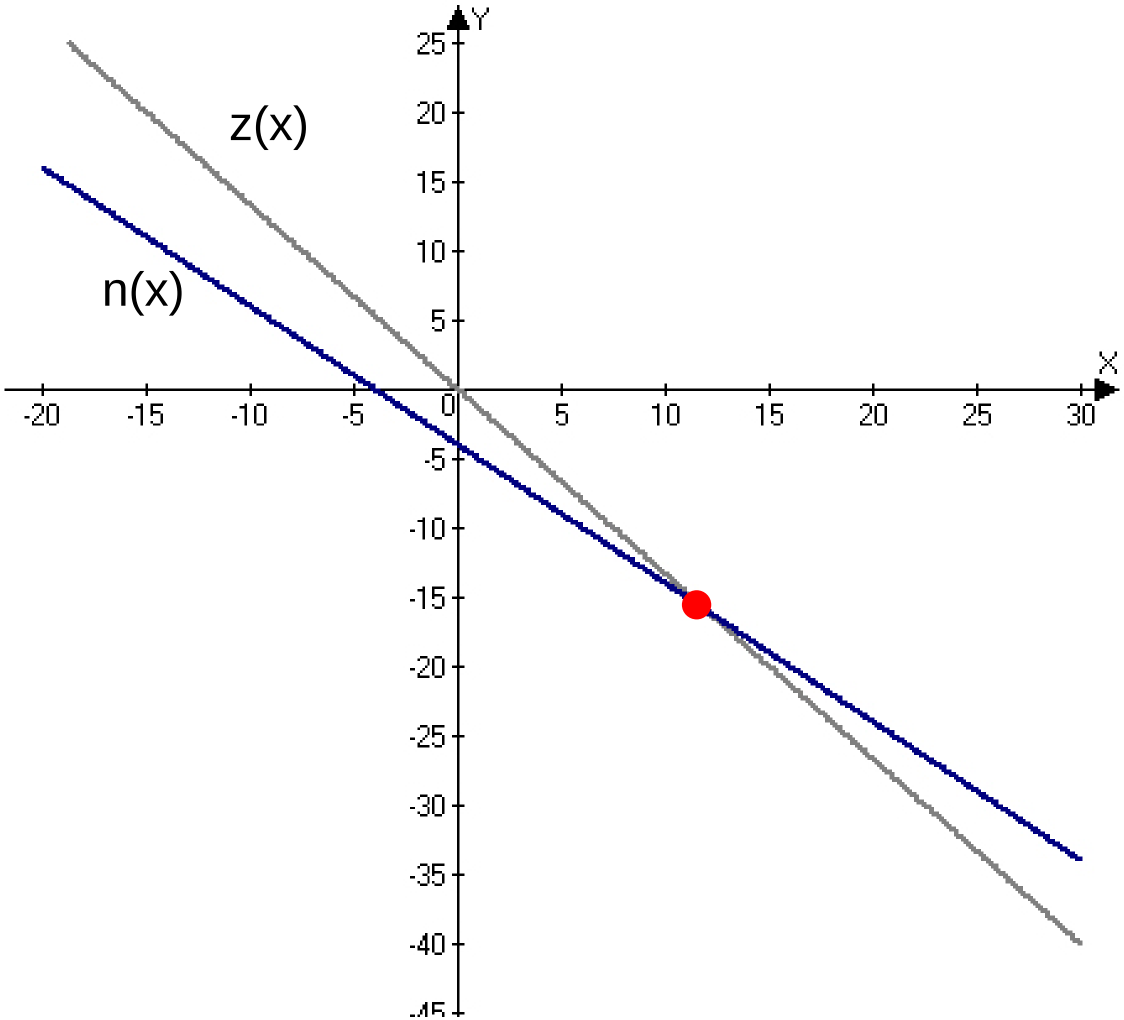
Lösungsraum



1.2 Quotientenprogramm

Idee des Verfahrens von Isbell und Marlow (2)

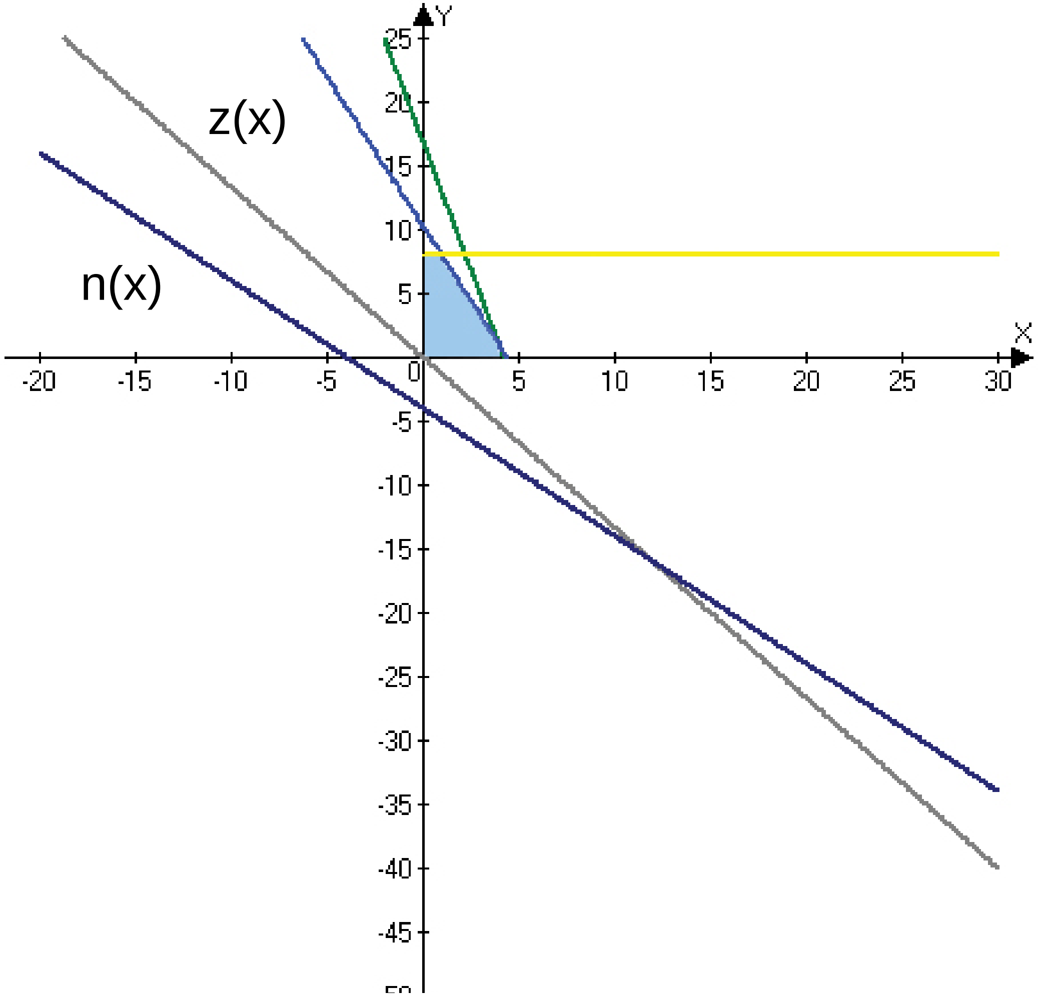
Der Schnittpunkt der Geraden z(x)=0 und n(x)=0 bestimmt die Hilfszielfunktionen



1.2 Quotientenprogramm

Idee des Verfahrens von Isbell und Marlow (3)

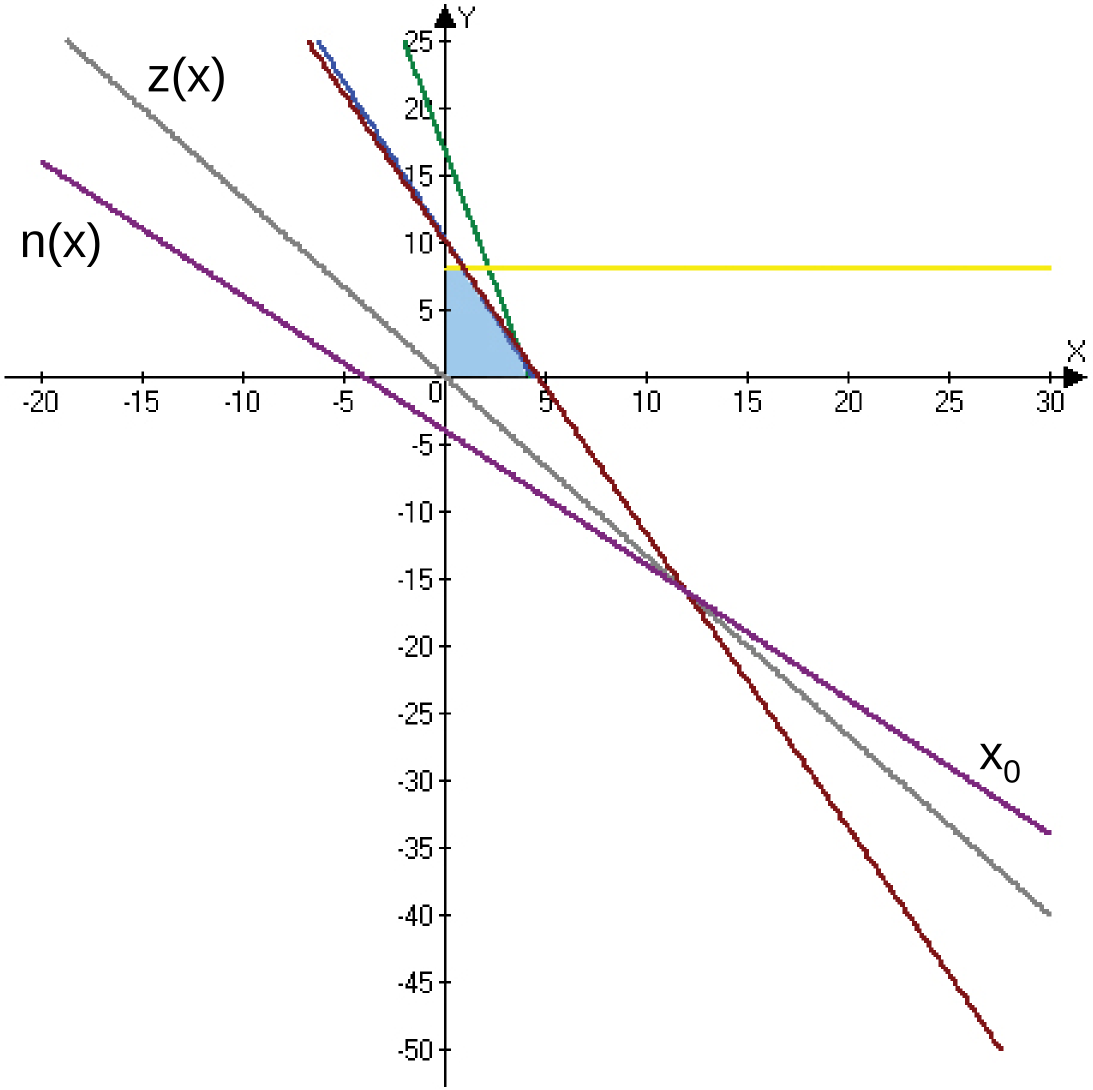
Nullösung ist zulässige Ausgangslösung; über optimale Lösung des Hilfsproblems lässt sich über Konstruktionsvorschrift weiteres Hilfsproblem bestimmen



1.2 Quotientenprogramm

Idee des Verfahrens von Isbell und Marlow (4)

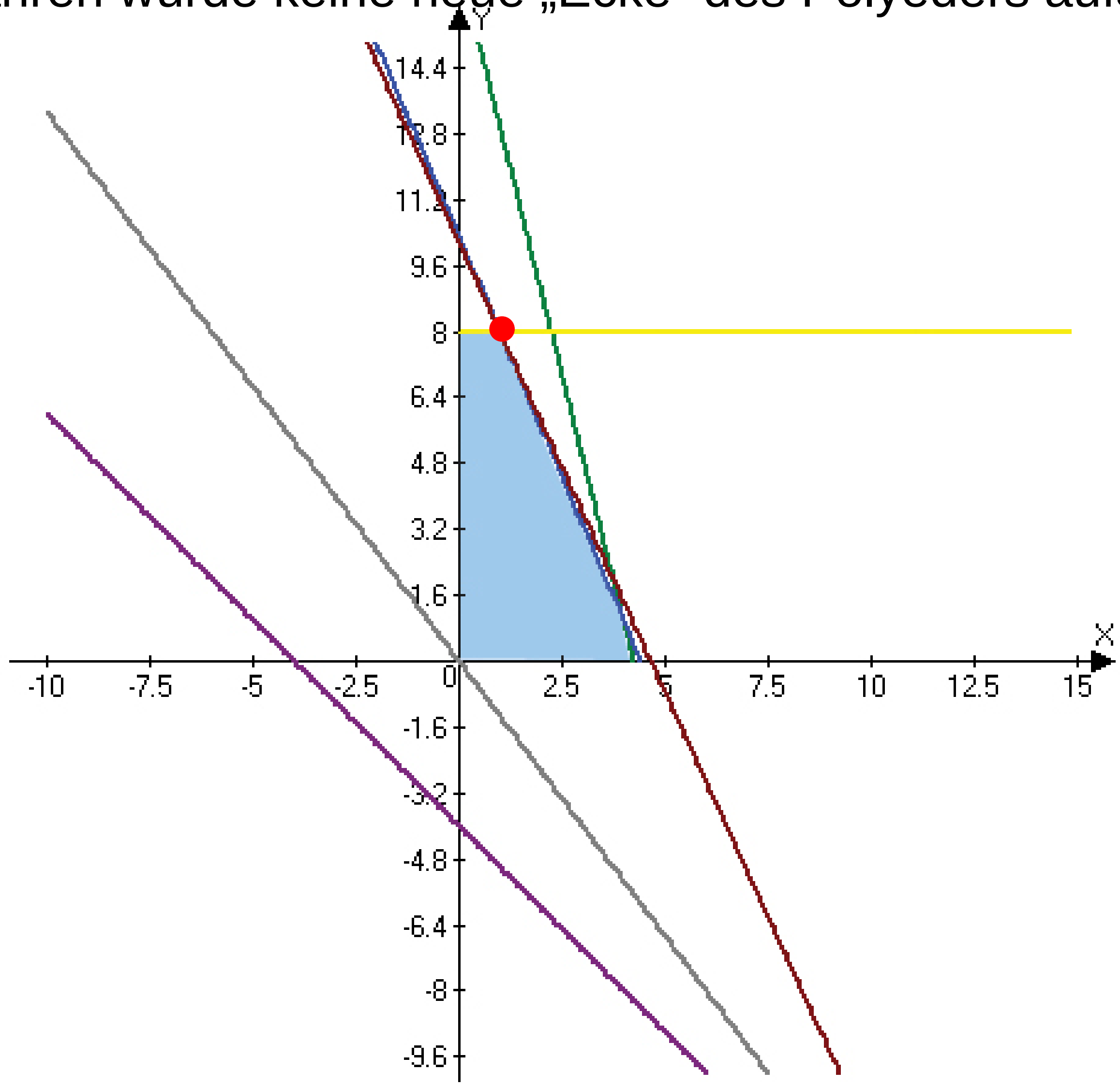
Konstruktionsvorschrift bei Isbell/Marlow: $x_0=z(x)-q(x^*)n(x)$



1.2 Quotientenprogramm

Idee des Verfahrens von Isbell und Marlow (5)

Optimale Lösung gefunden, wenn keine Verbesserung mehr möglich, d.h. Verfahren würde keine neue „Ecke“ des Polyeders aufsuchen



2. Ganzzahlige lineare Optimierung

- In der Praxis finden Methoden der linearen Optimierung breite Anwendung
- Bei einigen Problemen ist die Ganzzahligkeitsforderung für alle Strukturvariable (ILOP) oder für einige Variable (MILP) gegeben
- Verfahren der ganzzahligen Optimierung gehen von optimaler Lösung des zugehörigen nicht-ganzzahligen Problems aus und ermitteln dann sukzessiv die optimale Lösung des ganzzahligen Problems durch Einschränkung des Lösungsraums
- Entscheidungsbaumverfahren: Branch & Bound

2. Ganzzahlige lineare Optimierung

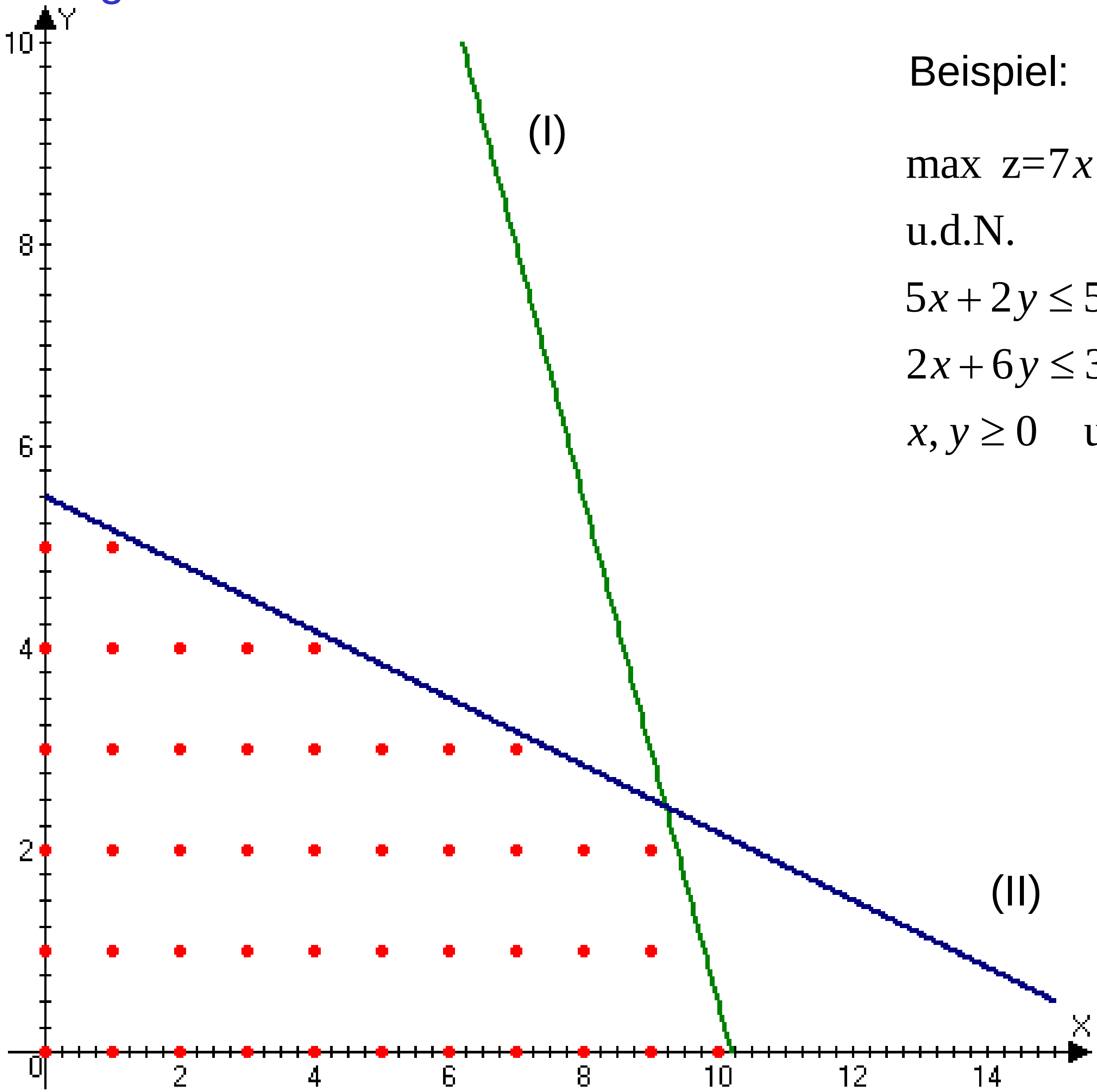
B & B ist ein spezielles Enumerationsverfahren

$\Rightarrow$ Suche nach Optimallösung durch Aufspalten des Lösungs-raums des LPs ohne Ganzzahligkeitsforderung

$\Rightarrow$ Aufspaltung lässt sich als Verzweigung im Entscheidungsbaum darstellen

2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Lösungsraum eines ILP



Beispiel:

$$\max \; z = 7x + 3y$$

u.d.N.

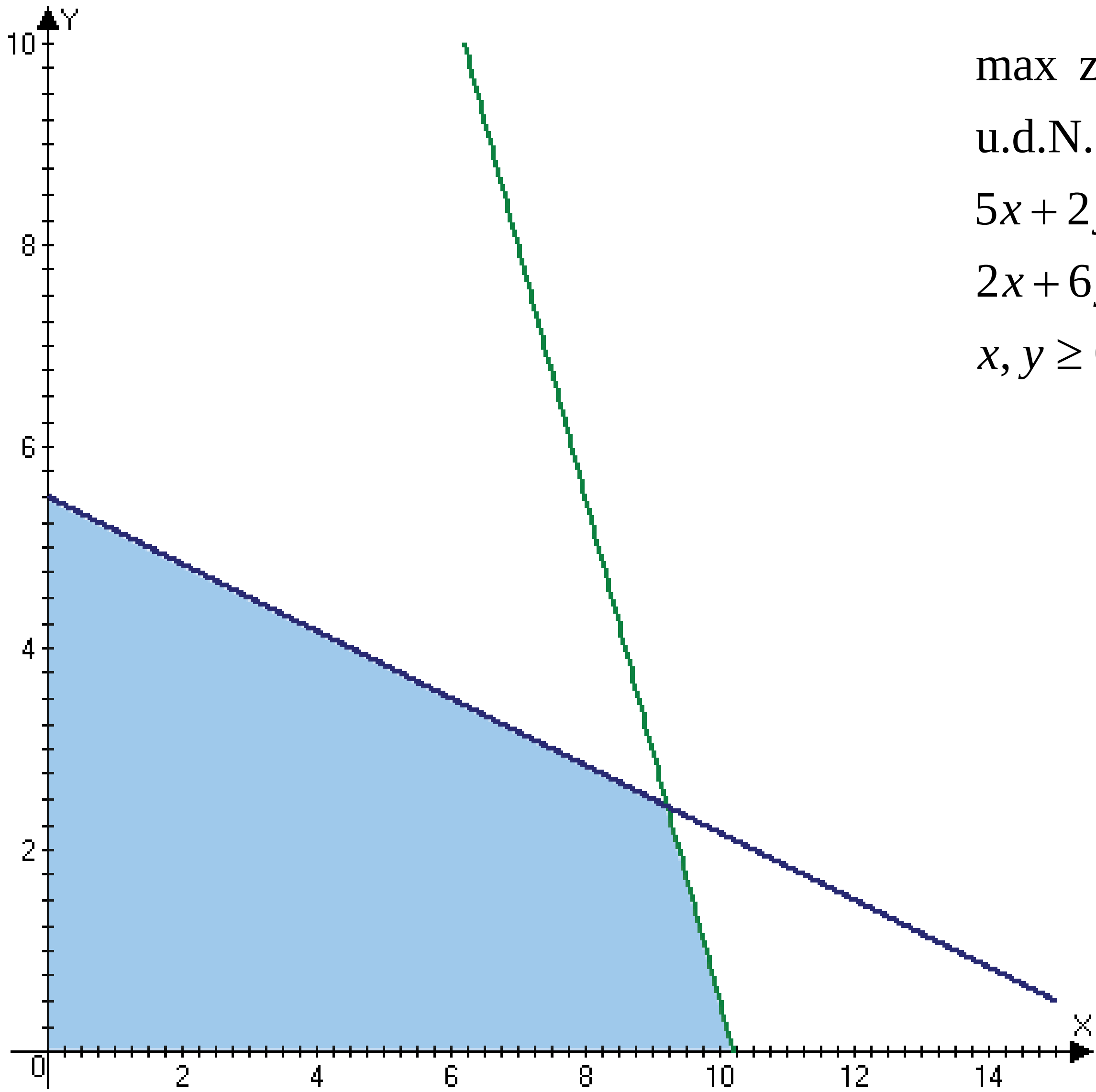
$$5x + 2y \leq 51 \qquad \text{(I)}$$

$$2x + 6y \leq 33 \qquad \text{(II)}$$

$$x, y \geq 0 \quad \text{und ganzzahlig}$$

2. Ganzzahlige lineare Optimierung

LP-Relaxation und Lösungsraum des zugehörigen LP



$$\max \; z = 7x + 3y$$

u.d.N.

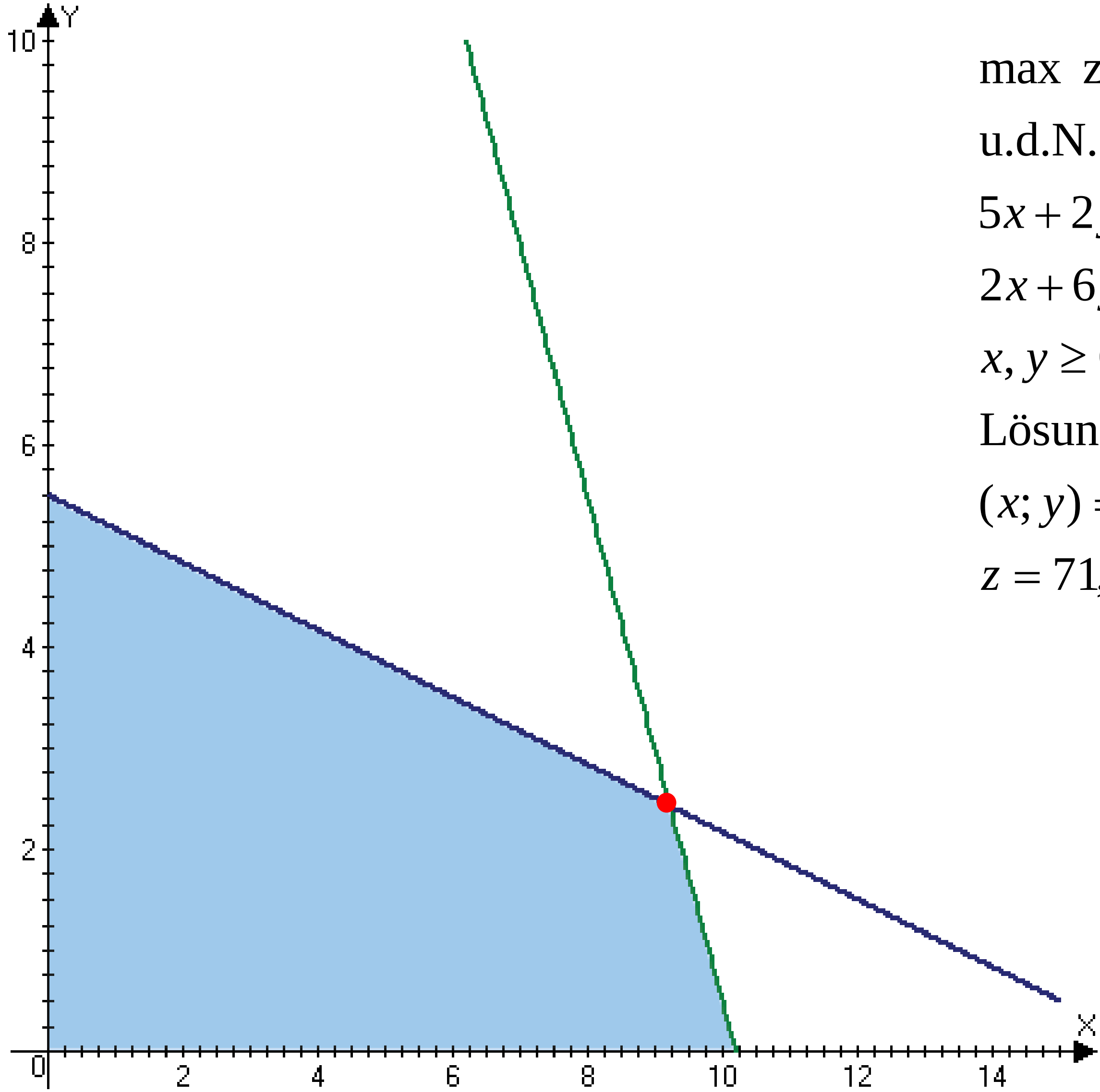
$$5x + 2y \le 51 \qquad \text{(I)}$$

$$2x + 6y \le 33 \qquad \text{(II)}$$

$$x, y \ge 0$$

2. Ganzzahlige lineare Optimierung

LP-Relaxation und Lösung des zugehörigen LP



$\max\ z = 7x + 3y$

u.d.N.

$5x + 2y \leq 51$ (I)

$2x + 6y \leq 33$ (II)

$x, y \geq 0$

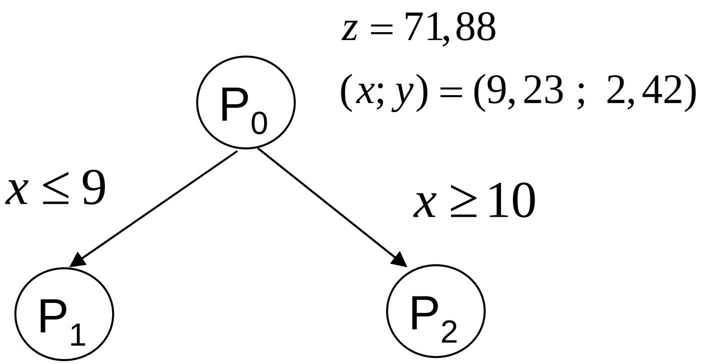
Lösung:

$(x; y) = (9{,}23; 2{,}42)$

$z = 71{,}88$

2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Aufspaltung in Teilprobleme P1 und P2



$\max\ z = 7x + 3y$

u.d.N.

$5x + 2y \leq 51$ (I)

$2x + 6y \leq 33$ (II)

$x, y \geq 0$

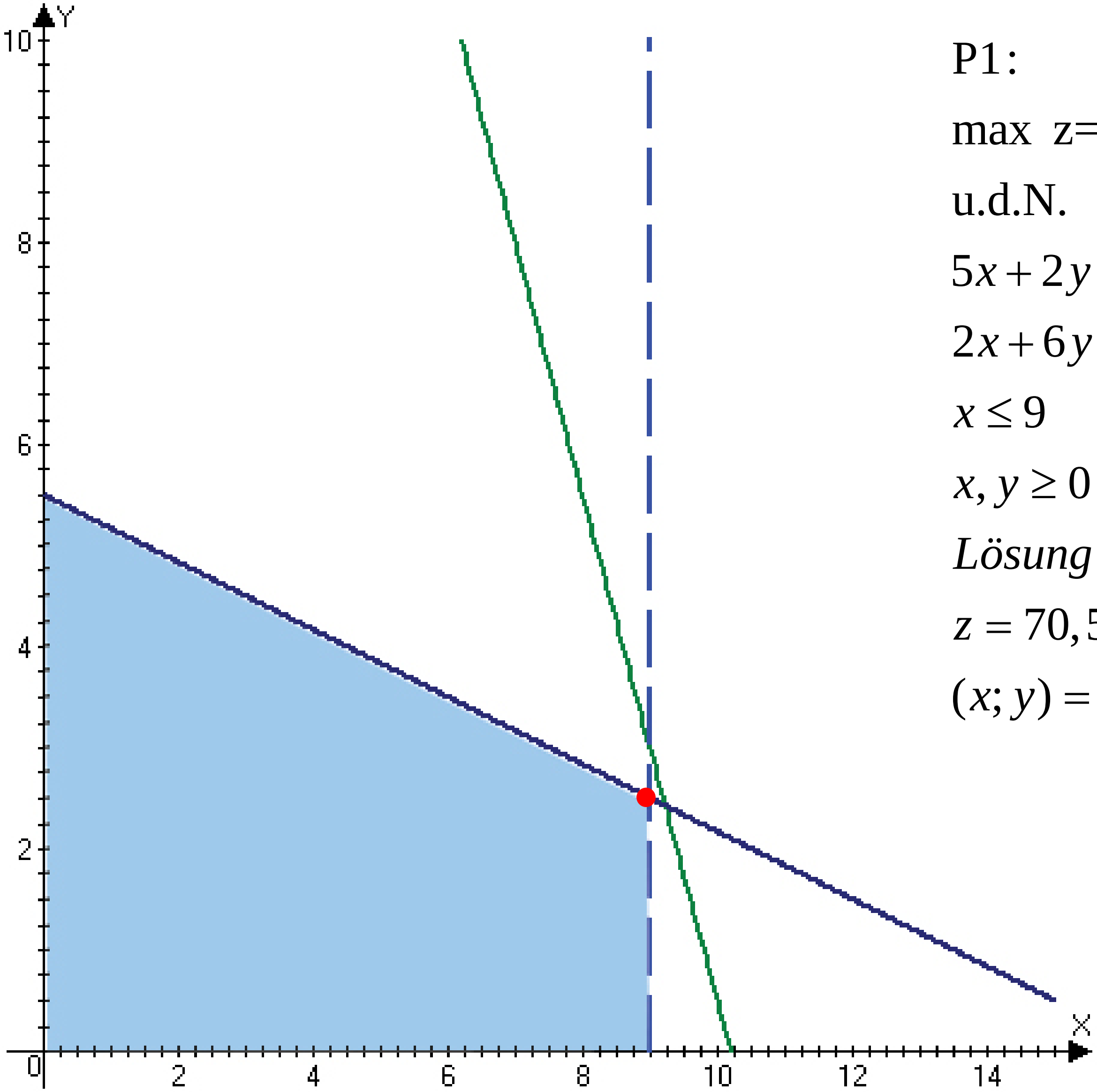
Lösung:

$(x;y) = (9{,}23; 2{,}42)$

$z = 71{,}88$

2. Ganzzahlige lineare Optimierung

P1



P1:

max $z=7x+3y$

u.d.N.

$5x+2y \leq 51$ (I)

$2x+6y \leq 33$ (II)

$x \leq 9$

$x, y \geq 0$

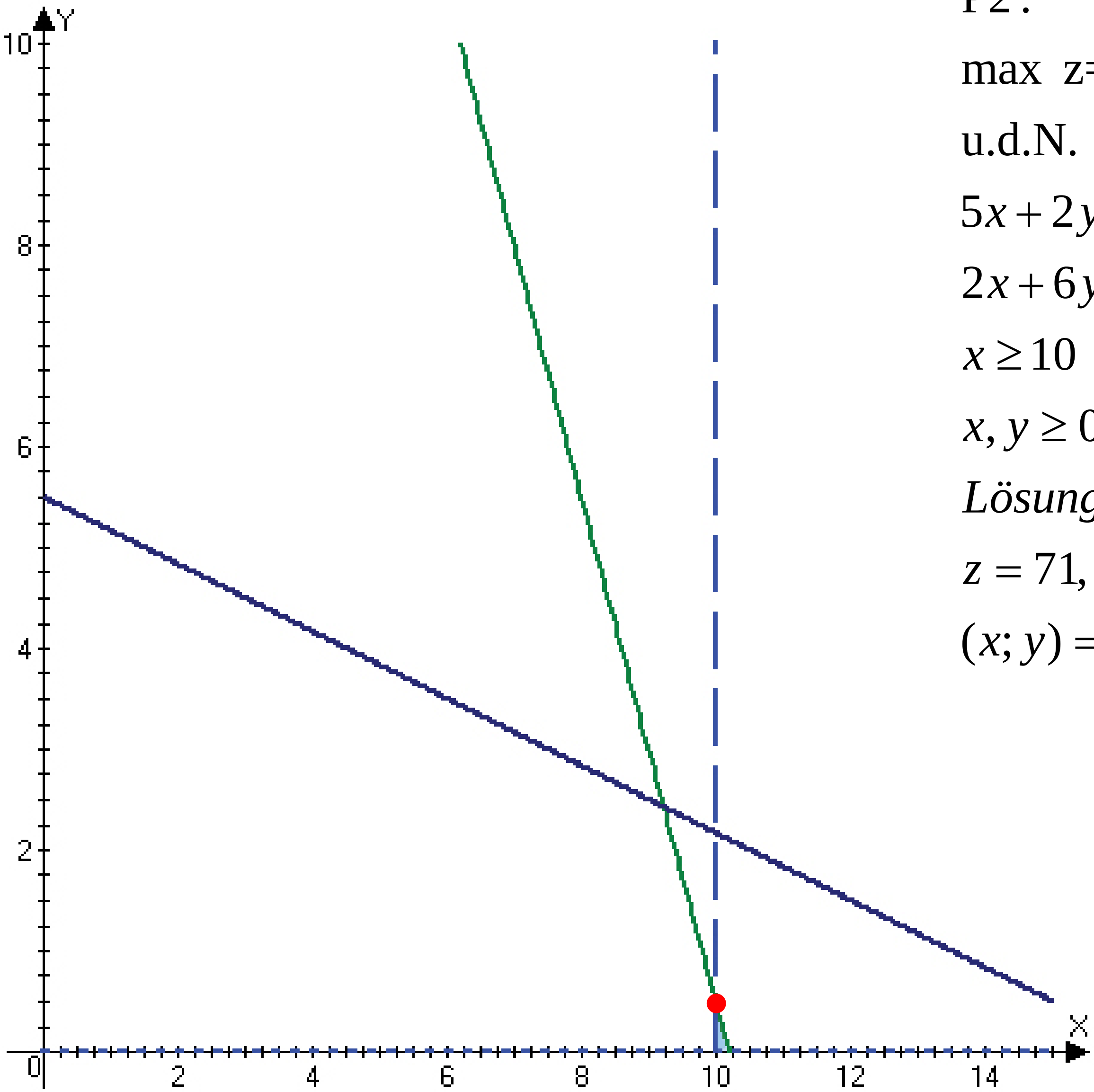
Lösung :

$z = 70,5$

$(x; y) = (9 \ ; \ 2,5)$

2. Ganzzahlige lineare Optimierung

P2



P2 :

max $z = 7x + 3y$

u.d.N.

$5x + 2y \leq 51$ (I)

$2x + 6y \leq 33$ (II)

$x \geq 10$

$x, y \geq 0$

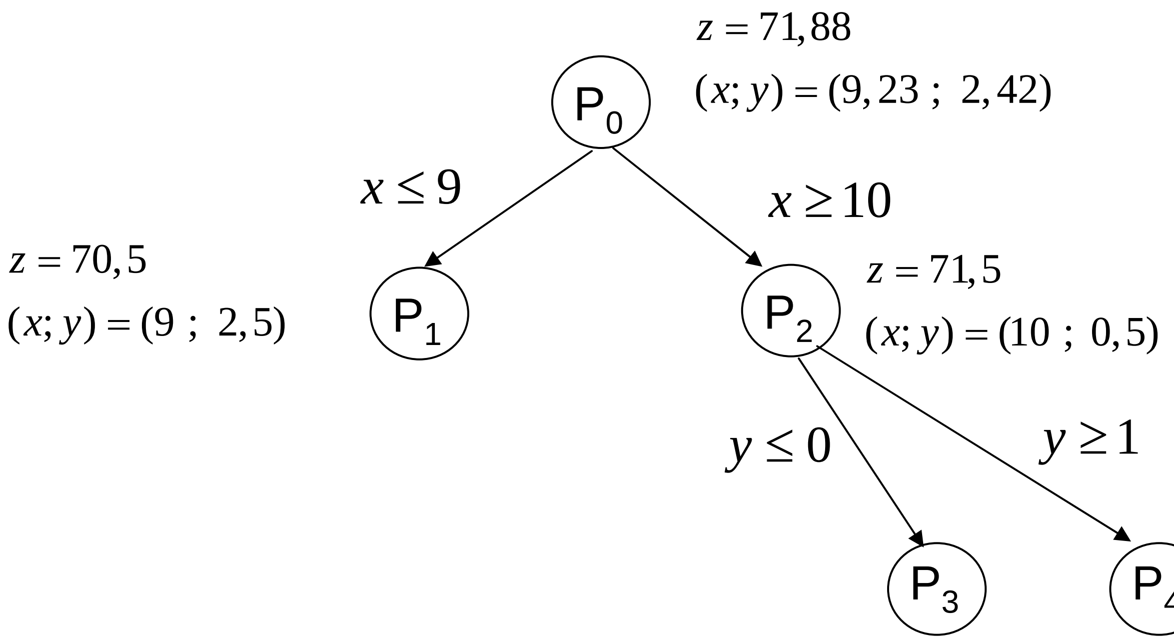
Lösung :

$z = 71,5$

$(x; y) = (10\ ;\ 0,5)$

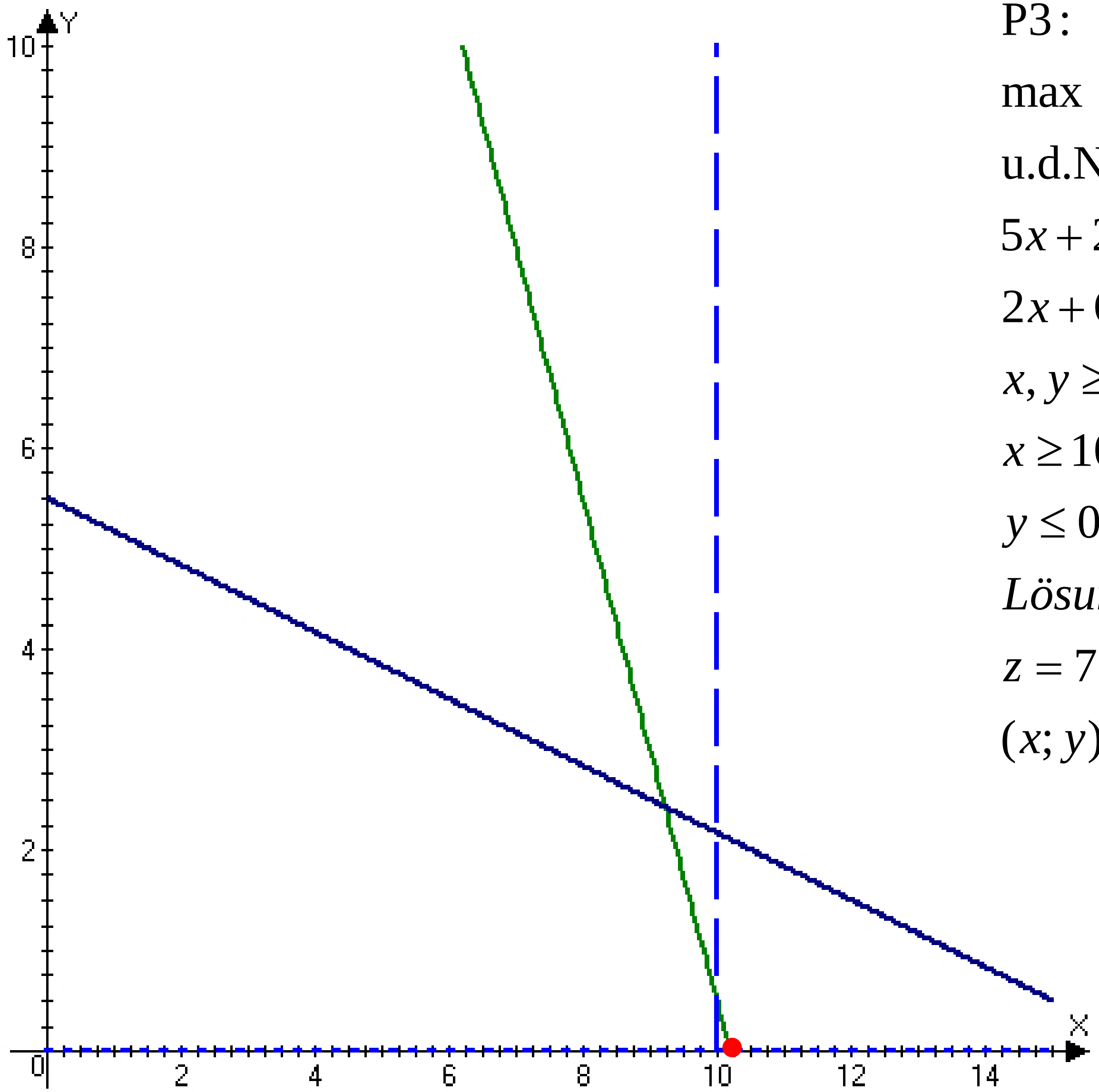
2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Aufspaltung von P2 in Teilprobleme P3 und P4, da z_{P2}=71,5>z_{P1}=70,5



2. Ganzzahlige lineare Optimierung

P3



P3 :

max $z=7x+3y$

u.d.N.

$5x+2y \leq 51$

$2x+6y \leq 33$

$x, y \geq 0$

$x \geq 10$

$y \leq 0$

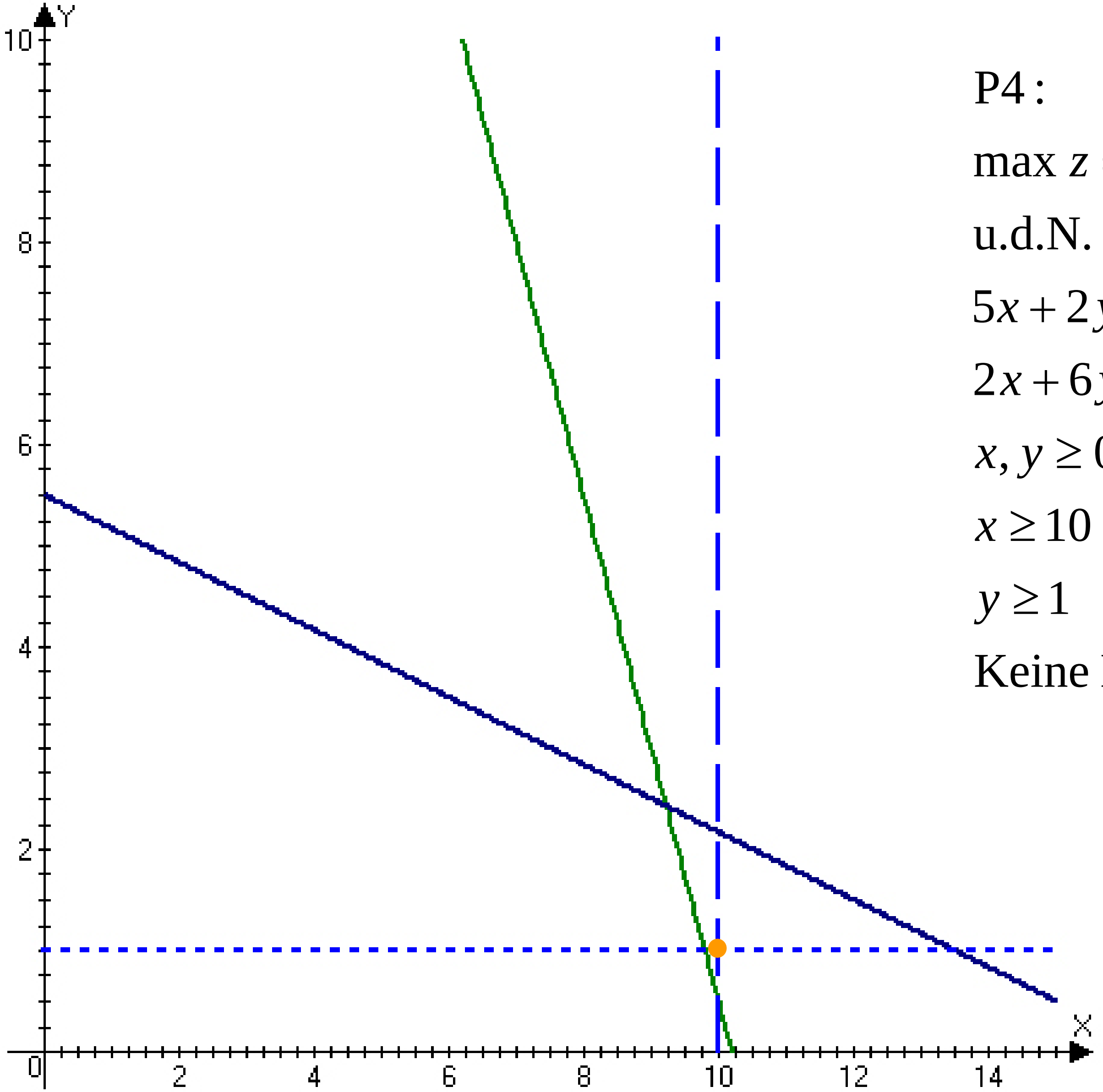
Lösung :

$z = 71,4$

$(x; y) = (10,2\ ;\ 0)$

2. Ganzzahlige lineare Optimierung

P4



P4 :

$\max z = 7x + 9y$

u.d.N.

$5x + 2y \leq 51$

$2x + 6y \leq 33$

$x, y \geq 0$

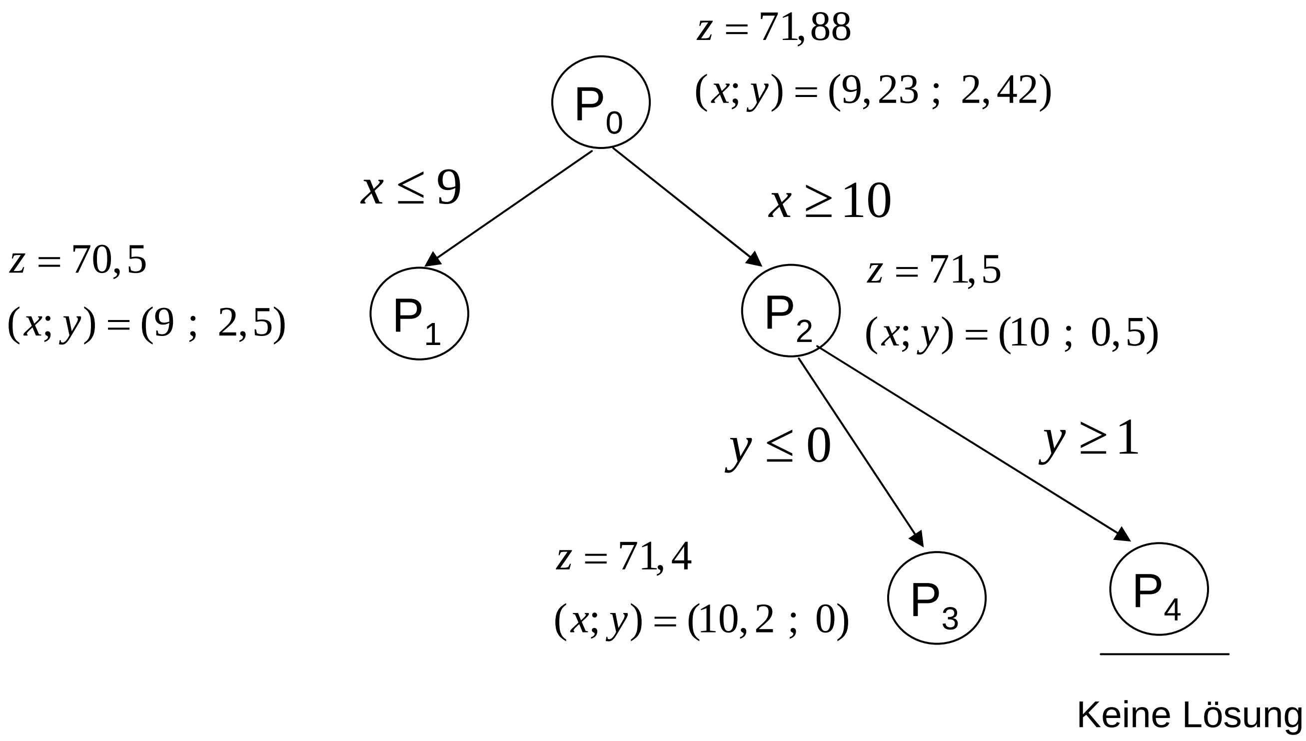
$x \geq 10$

$y \geq 1$

Keine Lösung

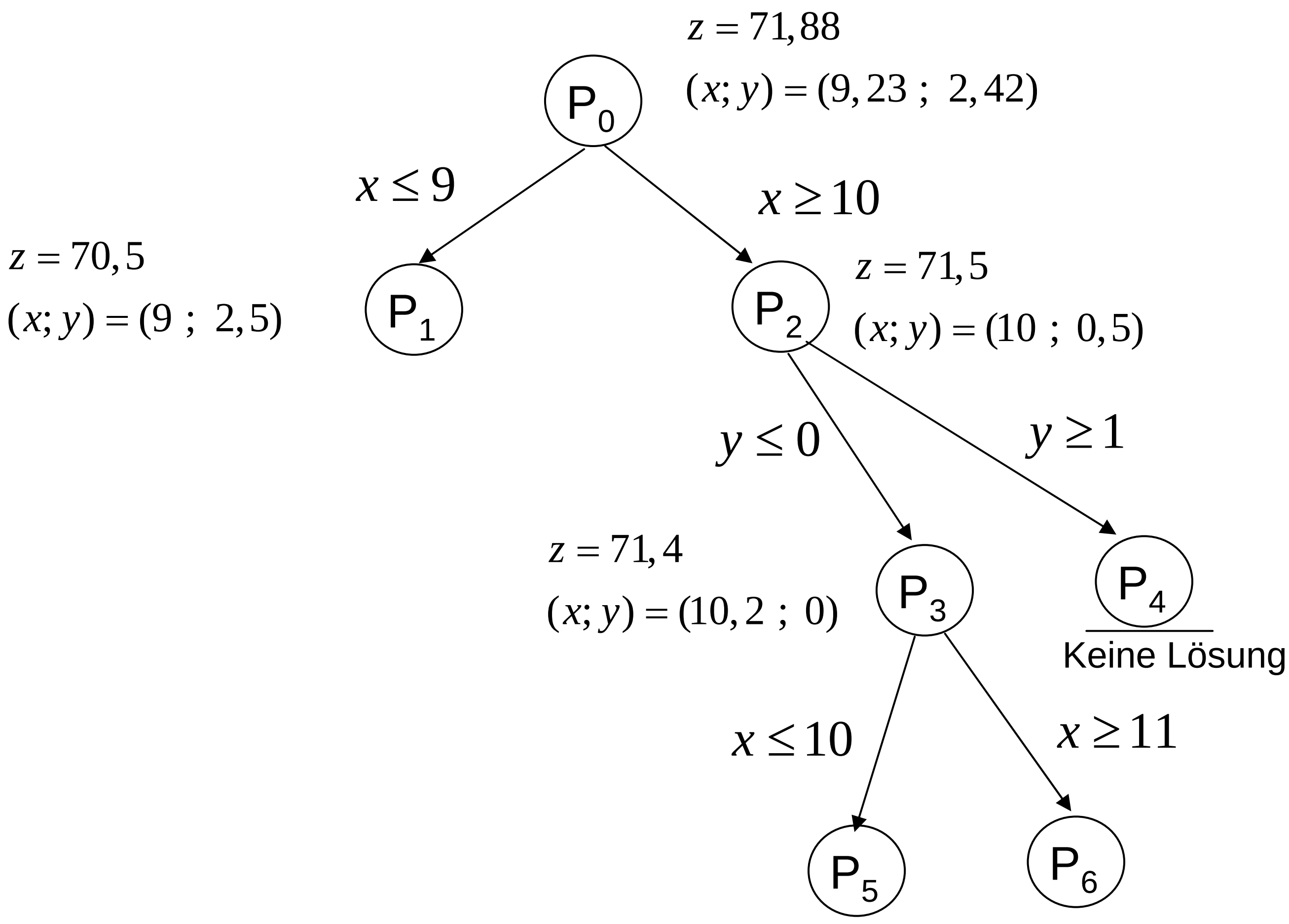
2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Aufspaltung in Teilprobleme P3 und P4



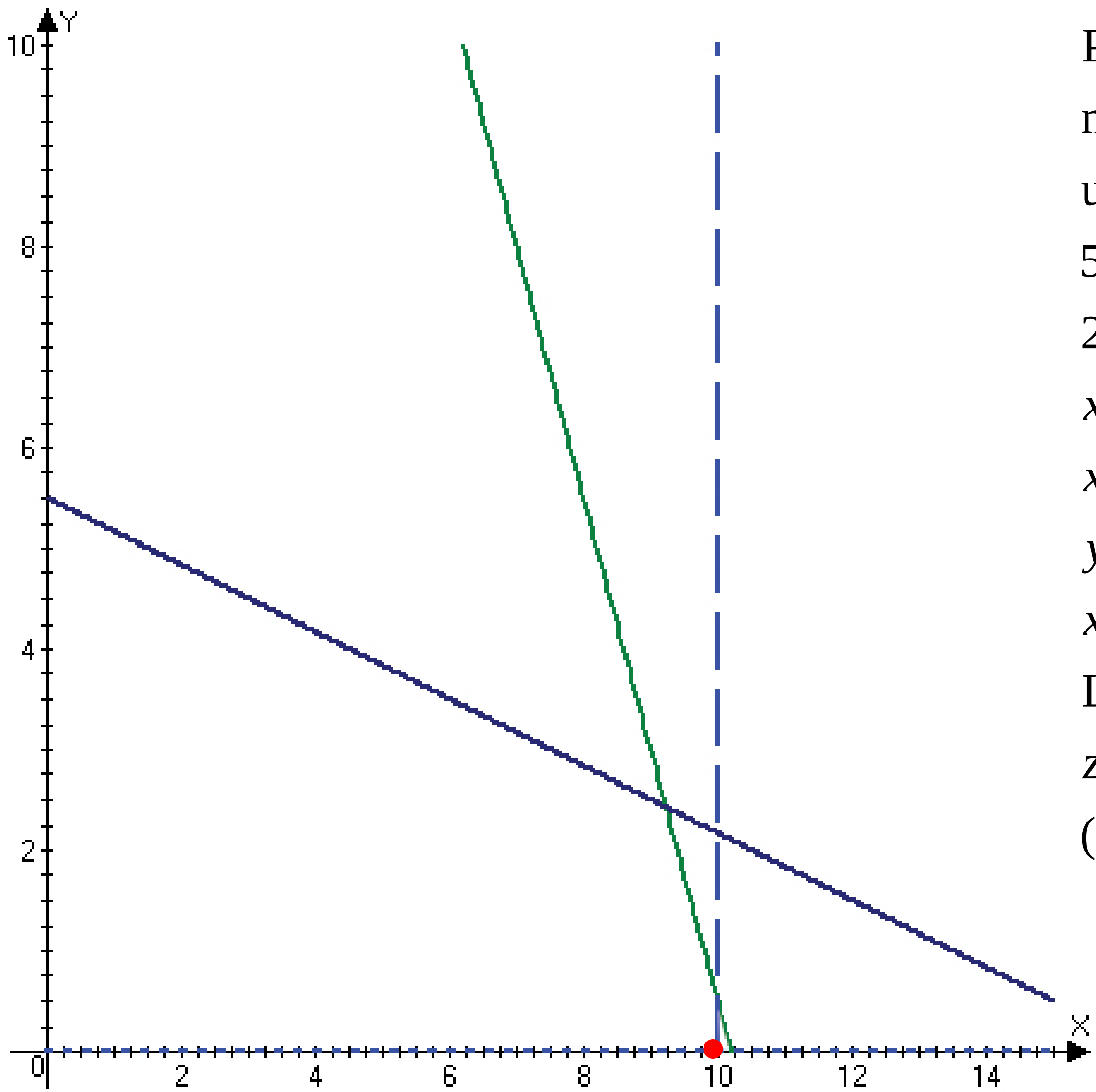
2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Aufspaltung von P3 in Teilprobleme P5 und P6, da $z_{P3}=71{,}4>z_{P2}=70{,}5$



2. Ganzzahlige lineare Optimierung

P5



P5:

$\max z = 7x + 9y$

u.d.N.

$5x + 2y \leq 51$

$2x + 6y \leq 33$

$x, y \geq 0$

$x \geq 10$

$y \leq 0$

$x \leq 10$

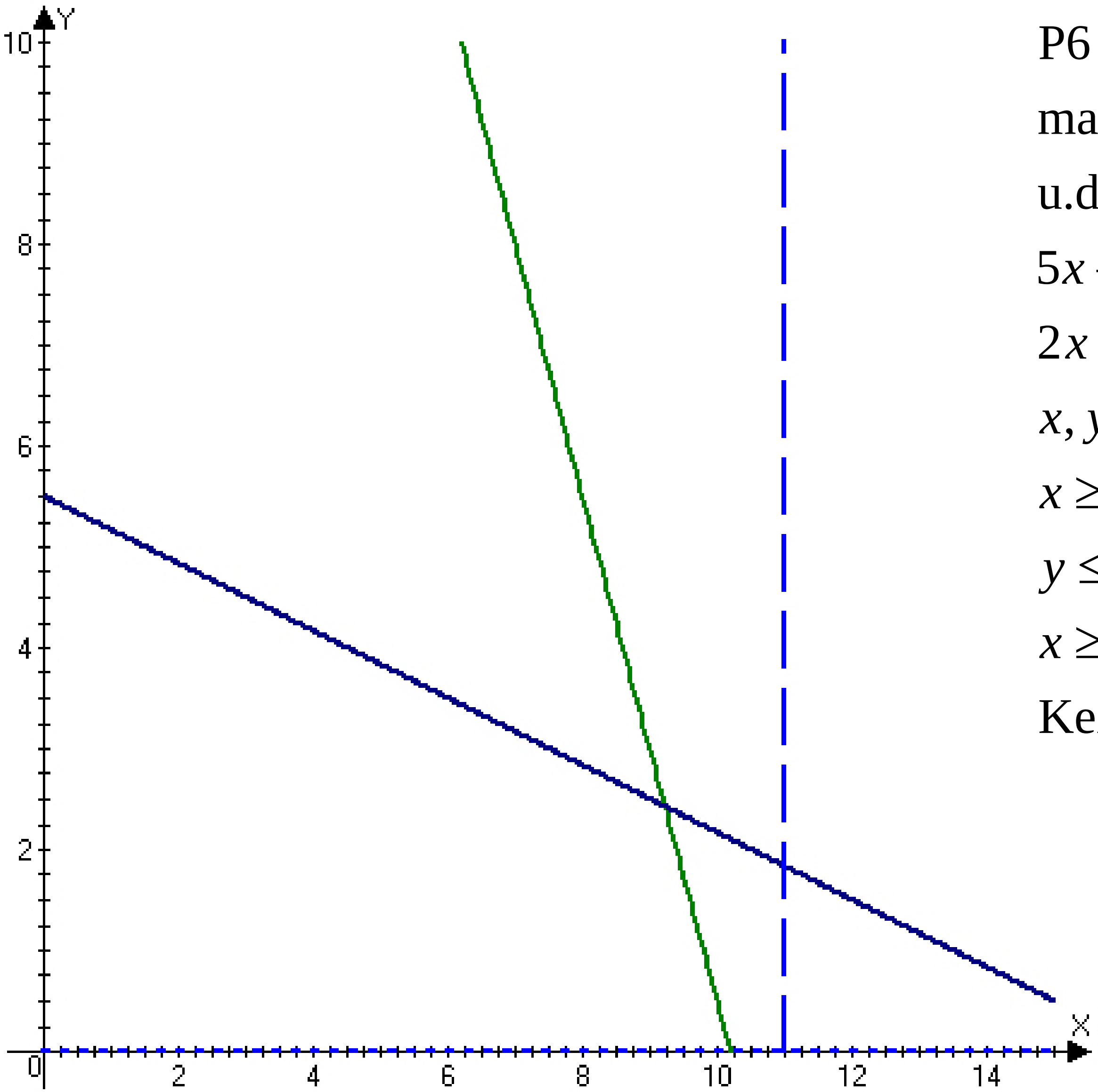
Lösung:

$z = 70$

$(x; y) = (10; 0)$

2. Ganzzahlige lineare Optimierung

P6



P6 :

$\max z = 7x + 9y$

u.d.N.

$5x + 2y \leq 51$

$2x + 6y \leq 33$

$x, y \geq 0$

$x \geq 10$

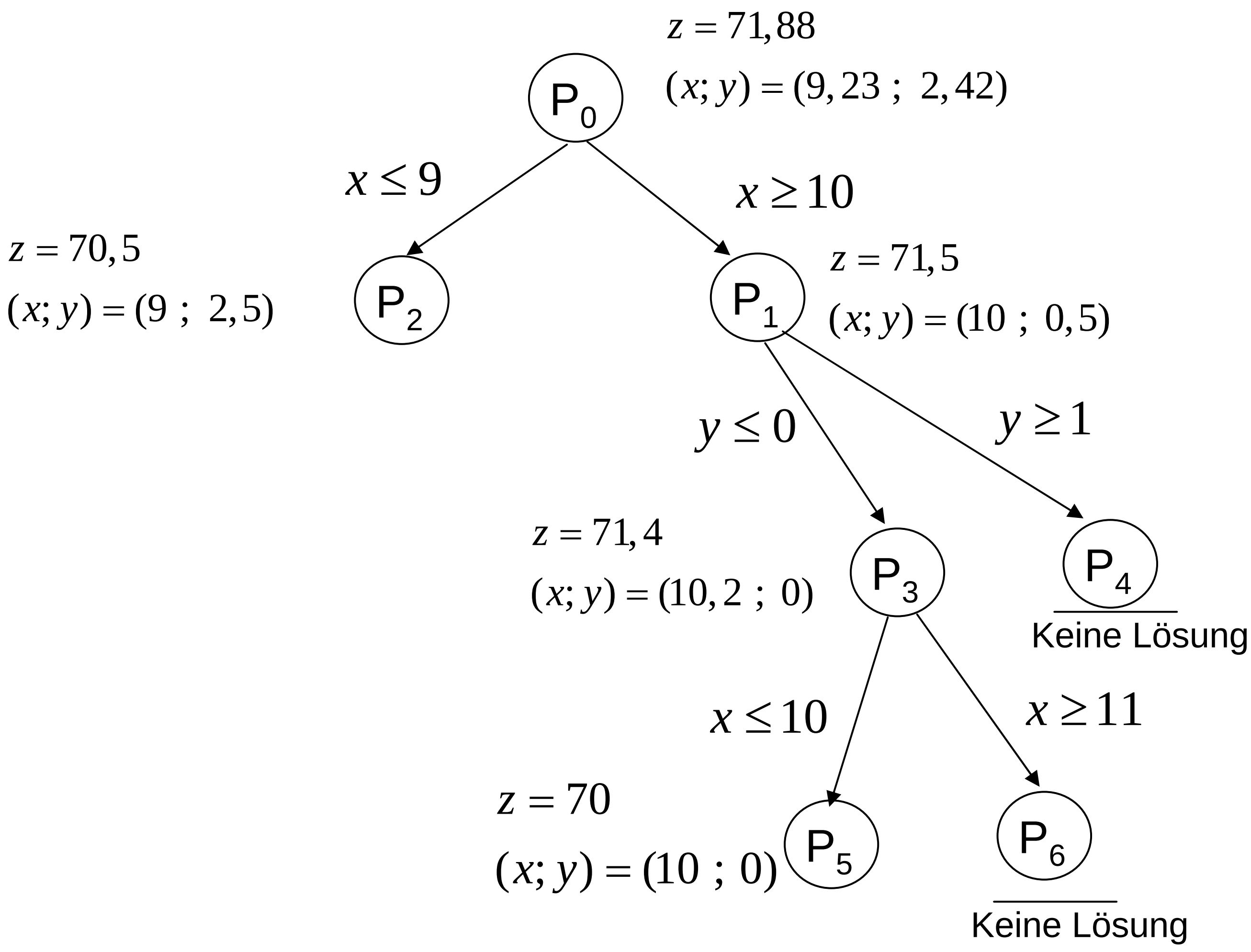
$y \leq 0$

$x \geq 11$

Keine Lösung

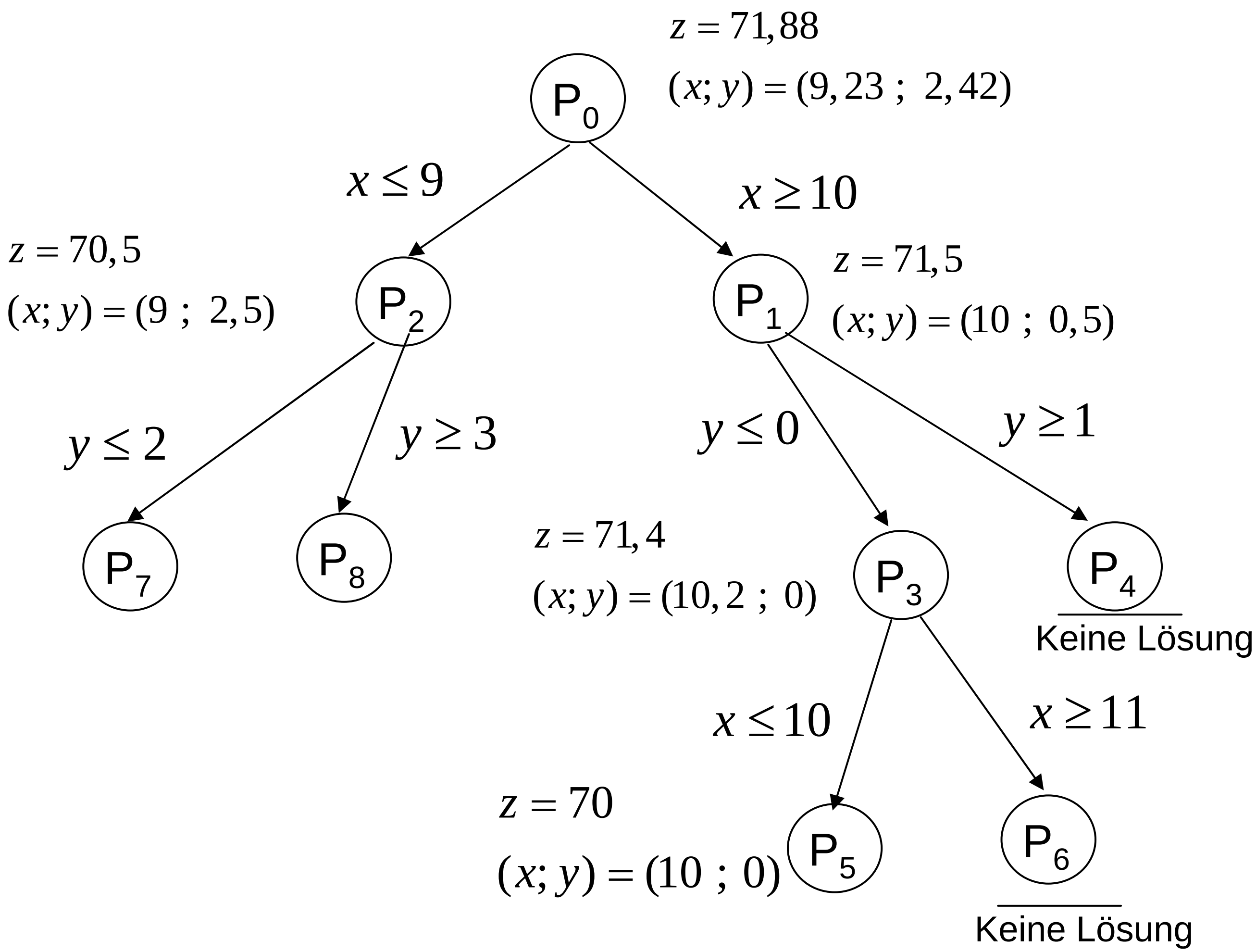
2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Aufspaltung von P3 in Teilprobleme P5 und P6, da $z_{P3}=71,4>z_{P2}=70,5$



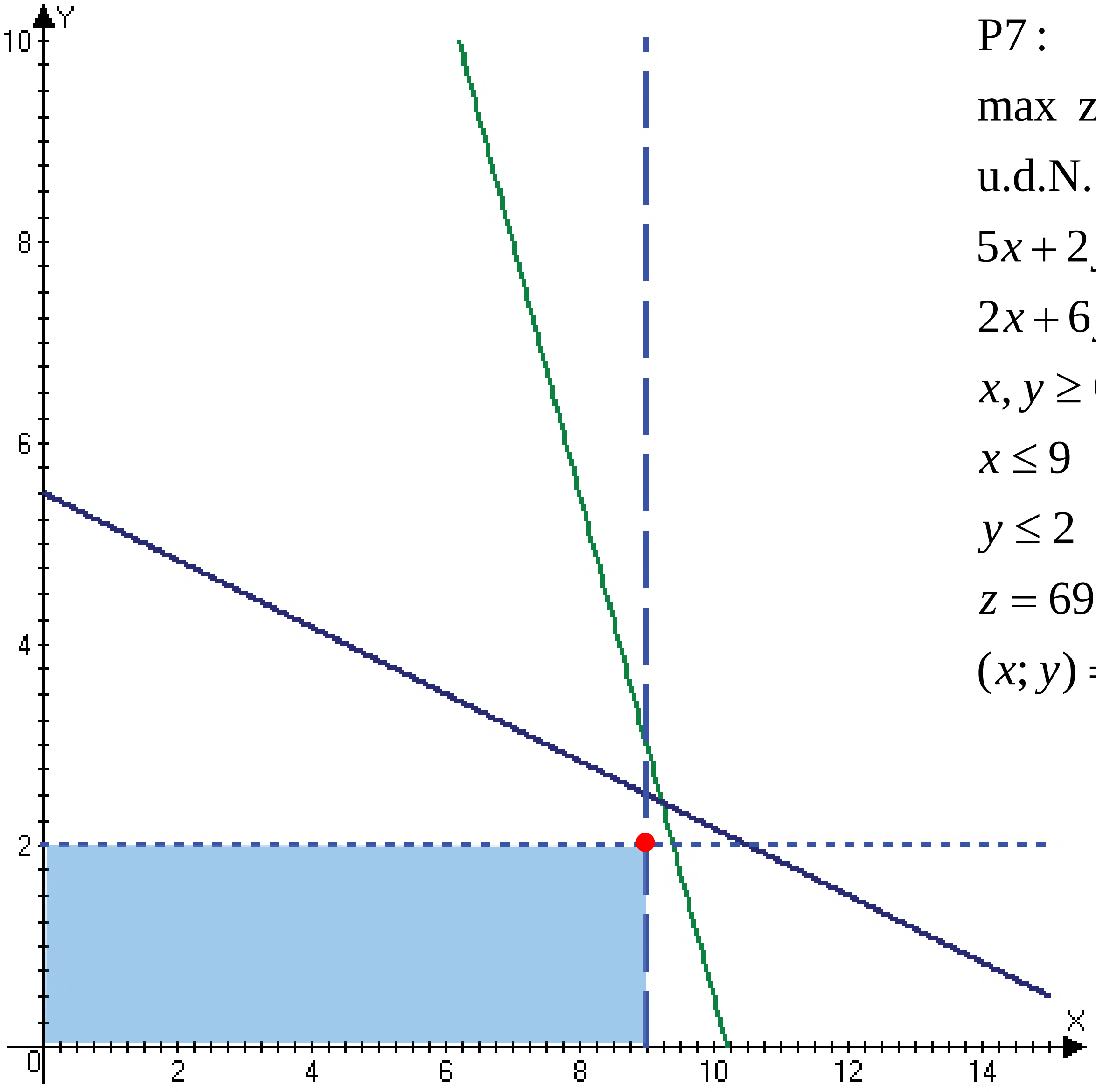
2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Aufspaltung von P2 in Teilprobleme P7 und P8, da $z_{P2}=70{,}5>z_{P5}=70$



2. Ganzzahlige lineare Optimierung

P7



P7 :

$\max \; z = 7x + 3y$

u.d.N.

$5x + 2y \leq 51$

$2x + 6y \leq 33$

$x, y \geq 0$

$x \leq 9$

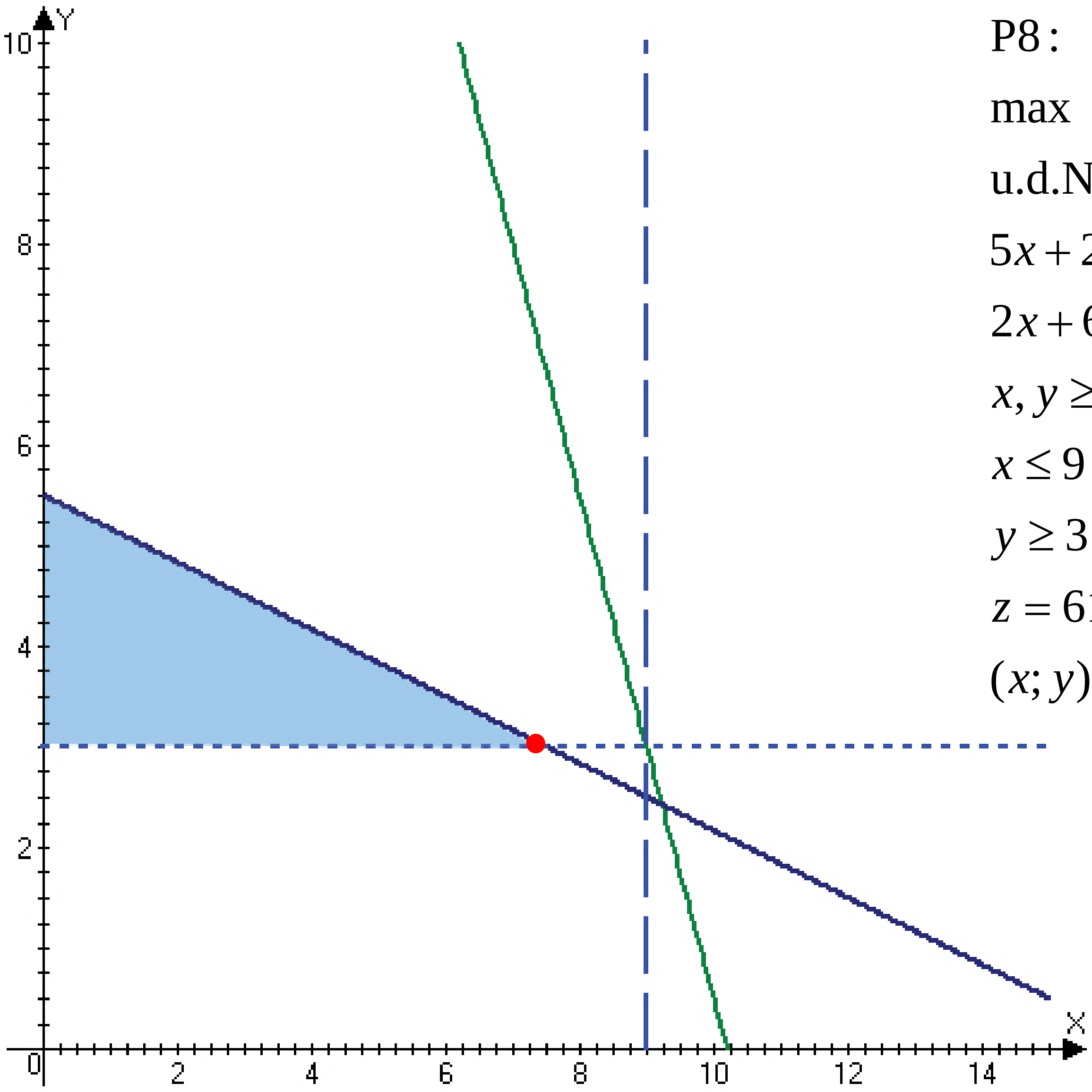
$y \leq 2$

$z = 69$

$(x; y) = (9; 2)$

2. Ganzzahlige lineare Optimierung

P8



P8 :

$\max \; z = 7x + 3y$

u.d.N.

$5x + 2y \leq 51$

$2x + 6y \leq 33$

$x, y \geq 0$

$x \leq 9$

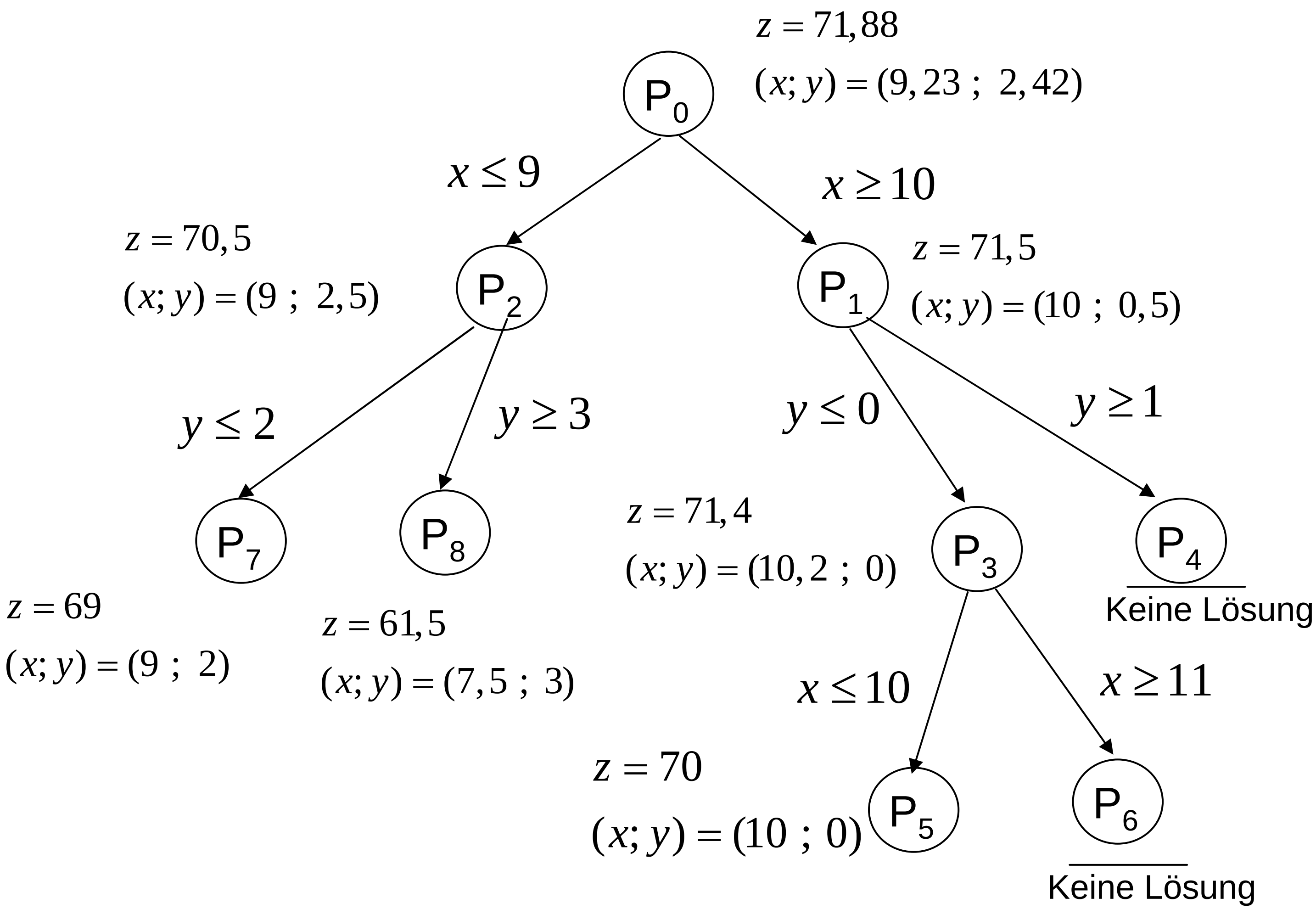
$y \geq 3$

$z = 61{,}5$

$(x; y) = (7{,}5 \; ; \; 3)$

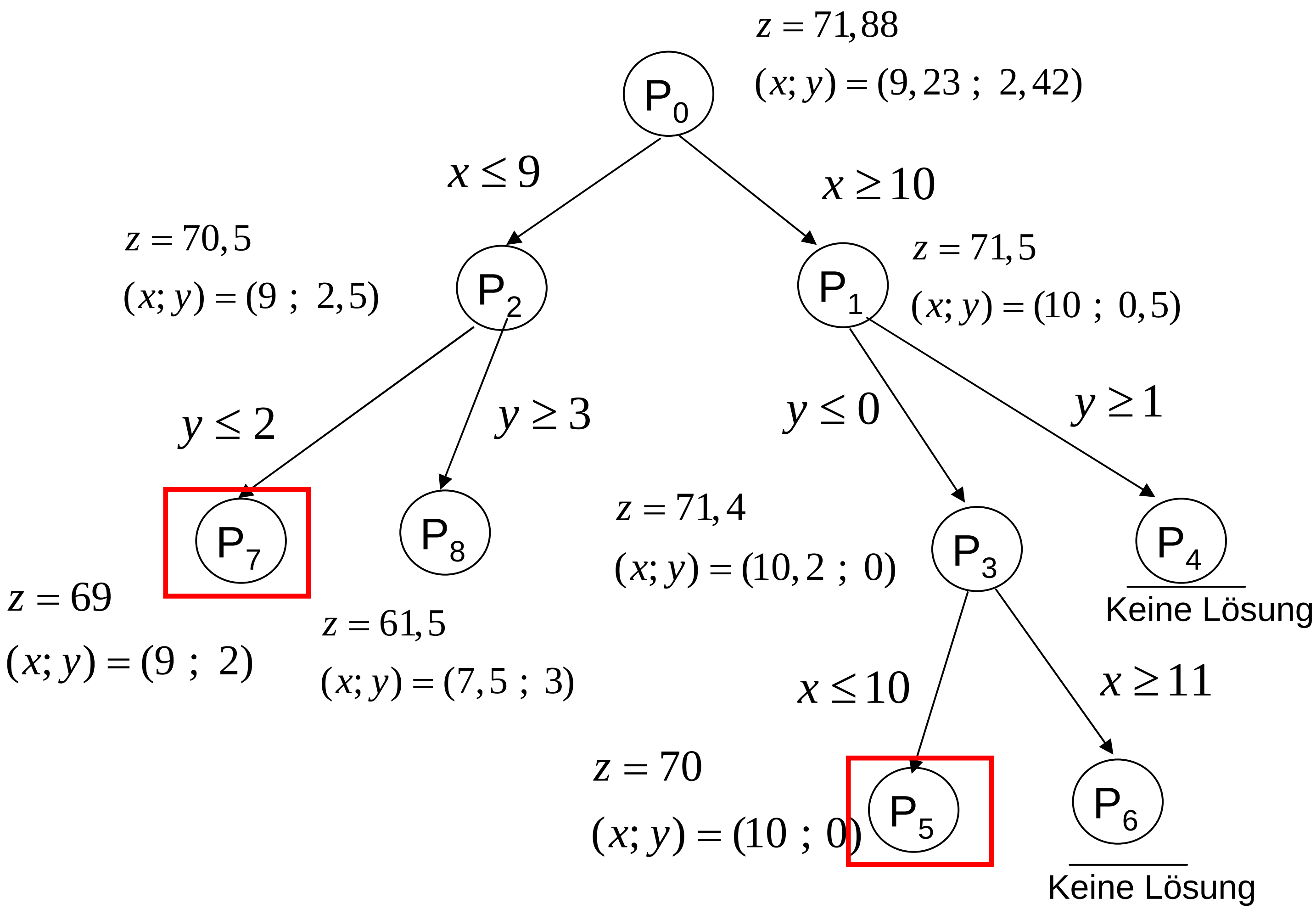
2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Aufspaltung von P2 in Teilprobleme P7 und P8



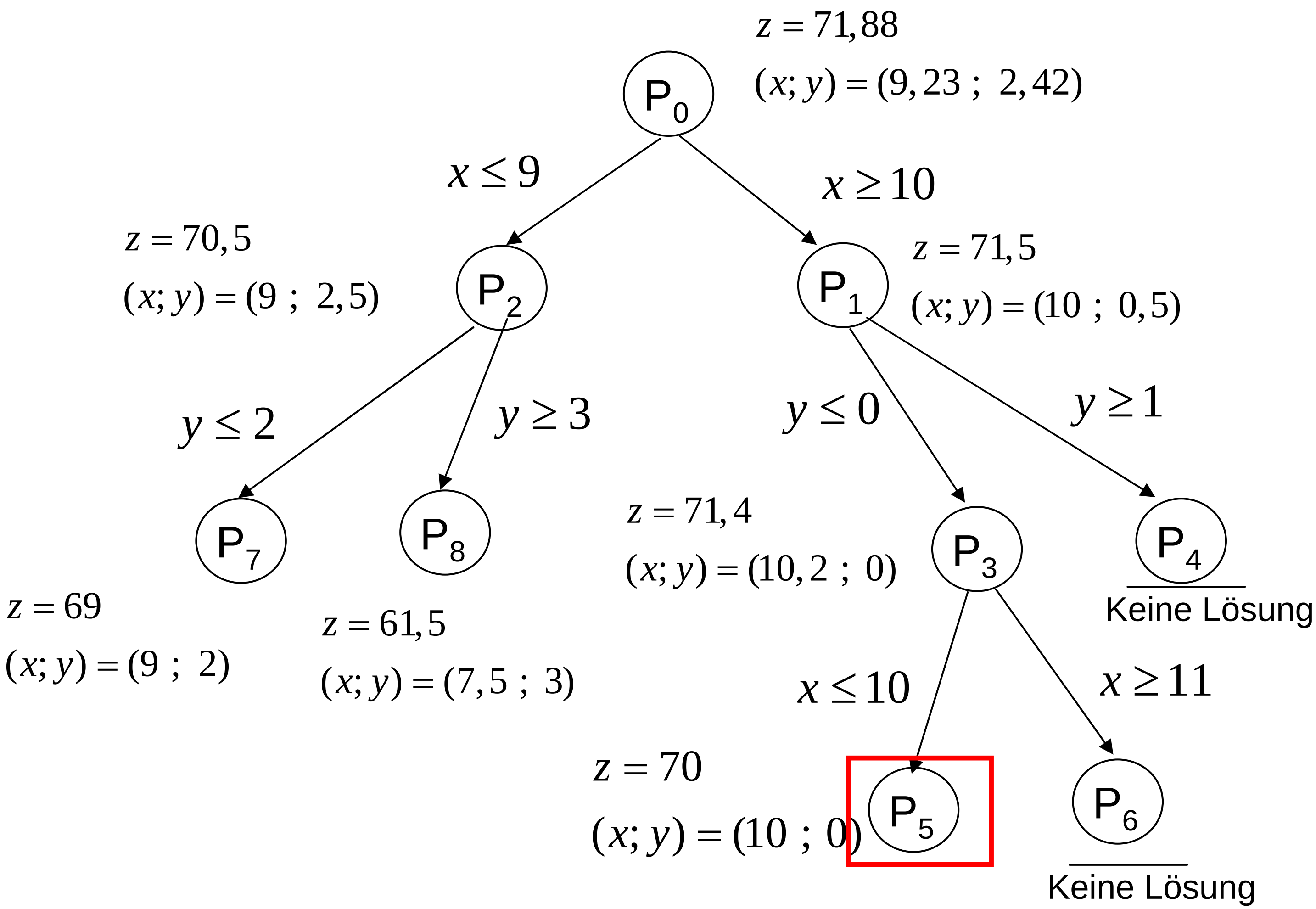
2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Optimale Lösung als beste aller zulässigen Lösungen



2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Optimale Lösung als beste aller zulässigen Lösungen



2. Ganzzahlige lineare Optimierung

Anmerkungen

- Mit Hilfe der Auswahlregel wird bestimmt, in welcher Reihenfolge die Teilprobleme bearbeitet werden.
- Regel der größten Schranke: Bei einem Maximierungsproblem das als nächstes behandeln, welches noch nicht untersucht wurde und die größte Schranke (ZFW) besitzt.
- LIFO-Regel: Das zuletzt behandelte Teilproblem wird solange weiter untersucht, bis es ausgeschieden werden kann.

Vor- und Nachteile beider Regeln bzgl. Kriterien, die bei der computergestützten Optimierung relevant sind?