Klausurrepetitorium ABWL „Planungs- und Entscheidungstechniken“

Südwestfälische Industrie- und Handelskammer

10. Februar 2006

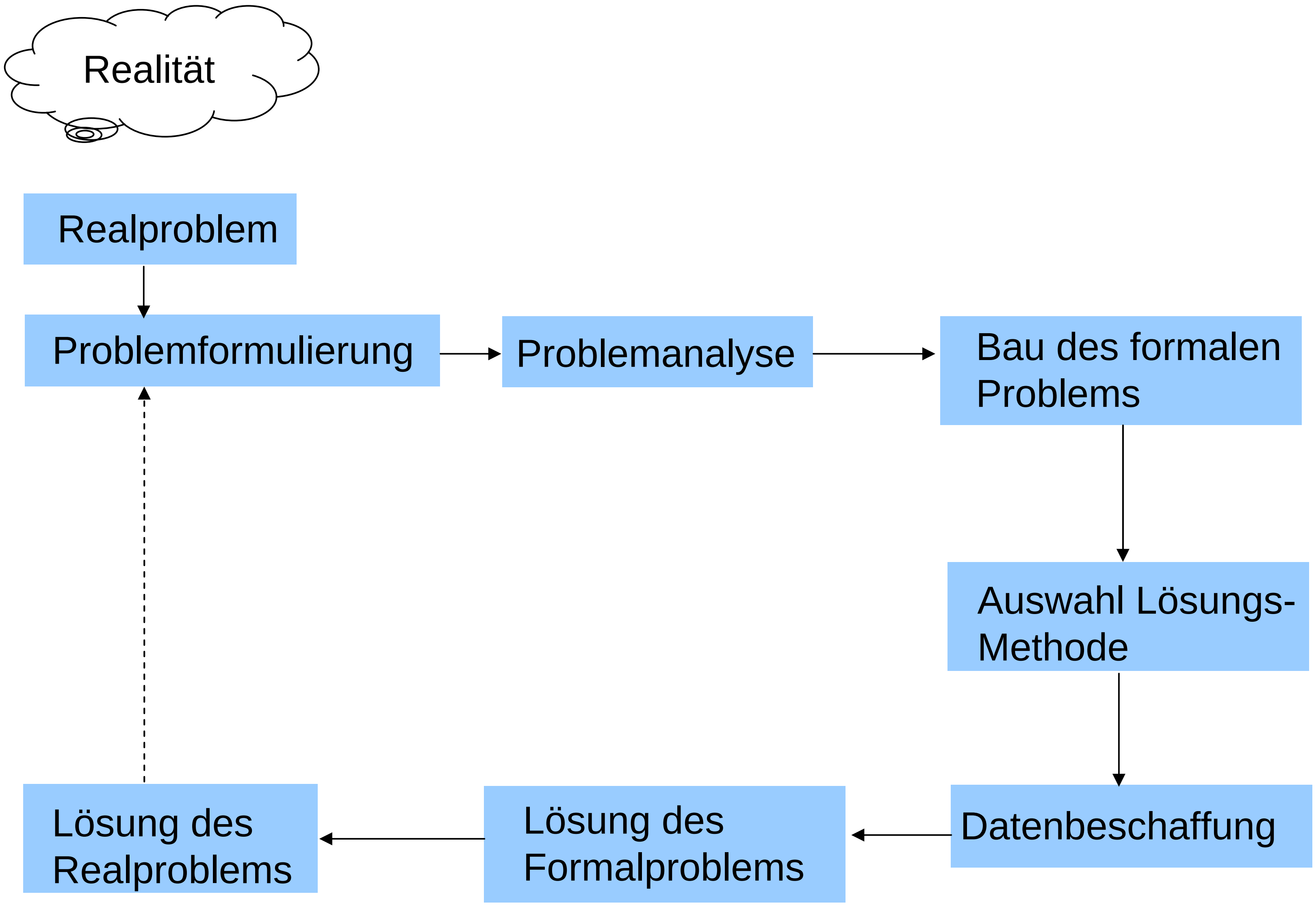
Dr. Friedhelm Kulmann, Sandra Rudolph

Gliederung

Gliederung

1. Weiche Planung

Planen mit mathematischen Modellen



1. Weiche Planung

Unscharfe Mengen

Unscharfe LOP

Warum werden Optimierungsprobleme unscharf formuliert?

Allein in der Problemformulierung ist die Sprache nicht ausreichend, um sämtliche mit dem Problem zusammenhängende Gedanken und Vorstellungen vollständig und präzise auszudrücken

Arten von Unschärfe

- Intrinsische Unschärfe
  ... drückt Unschärfe menschlicher Empfindung aus wie bspw. Ausdrücke wie „hohes Einkommen“, „gute Konjunktur“ und „vertretbare Kosten“. Grenze, ab wann Einkommen als hoch einzustufen ist, ist subjektiv. Und: Ist ein Einkommen, welches 1 Cent unter dieser Grenze liegt, niedrig?
- Unscharfe Relationen
  ... sind Aussagen wie „ungefähr gleich“ und „nicht viel mehr als“. Die Zusammenhänge zwischen den Größen weisen keinen dichotomen Charakter auf (gleich/ungleich) und sind vage.

Gliederung

1. Weiche Planung
    1.1. Theorie unscharfer Mengen
    1.2. Unscharfe lineare Optimierungsprobleme

2. Betriebswirtschaftliche Standardprobleme
    2.1. Übersicht der Probleme
    2.2. Exakte und heuristische Verfahren

3. Vom Realproblem zum Modell – Beispiele –
    3.1. Netzplantechnik
    3.2. Ganzzahlige Lineare Optimierungsprobleme
    3.3. Lineare Optimierungsprobleme

1. Weiche Planung

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (I)

Ein Automobilhersteller kann aufgrund der Struktur der Produktionsprozesse nur drei bis acht Stück eines Sportwagens pro Tag herstellen. Ordnet man diesen jeweiligen Stückzahlen die Stückkosten zu (mit zunehmender Stückzahl können diese aufgrund Lagerengpässe steigen), so erhält man folgende Menge geordneter Paare {(Stückzahl, Stückkosten)}:

$$S = \{(3;30),(4;25),(5;23),(6;20),(7;22),(8;25)\}$$

Die Menge zulässiger Lösungen:

$$X = \{3,4,5,6,7,8\}$$

Hat der Hersteller das Ziel, zu <u>„minimalen Stückkosten“</u> zu produzieren, so werden sechs Sportwagen pro Tag gebaut.

Wird das Ziel aber formuliert, zu „vertretbaren Stückkosten“ zu produzieren, vielleicht, weil Produktionen von anderen Modellen dieselben Maschinen benötigen, so müssen noch weitere Aspekte außer den Stückkosten in dem Kalkül berücksichtigt werden wie bspw. Opportunitätskosten.

1. Weiche Planung

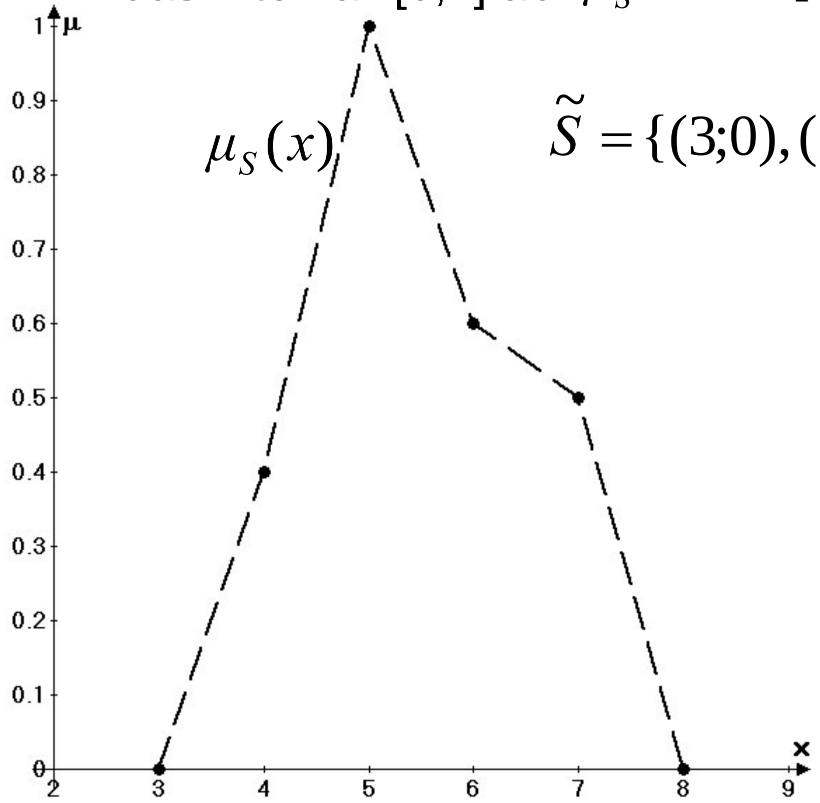
Unscharfe Mengen

Unscharfe LOP

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (II)

Der Entscheider muss nun bewerten, inwiefern die jeweiligen Stückkosten für eine Tagesproduktion „vertretbar“ sind. Die Bewertung kann als Grad der Zustimmung der Aussage. Diese Tagesproduktion erzeugt vertretbare Stückkosten“ interpretiert werden. Stimmt er der Aussage absolut zu, so bewertet er sie mit 1.

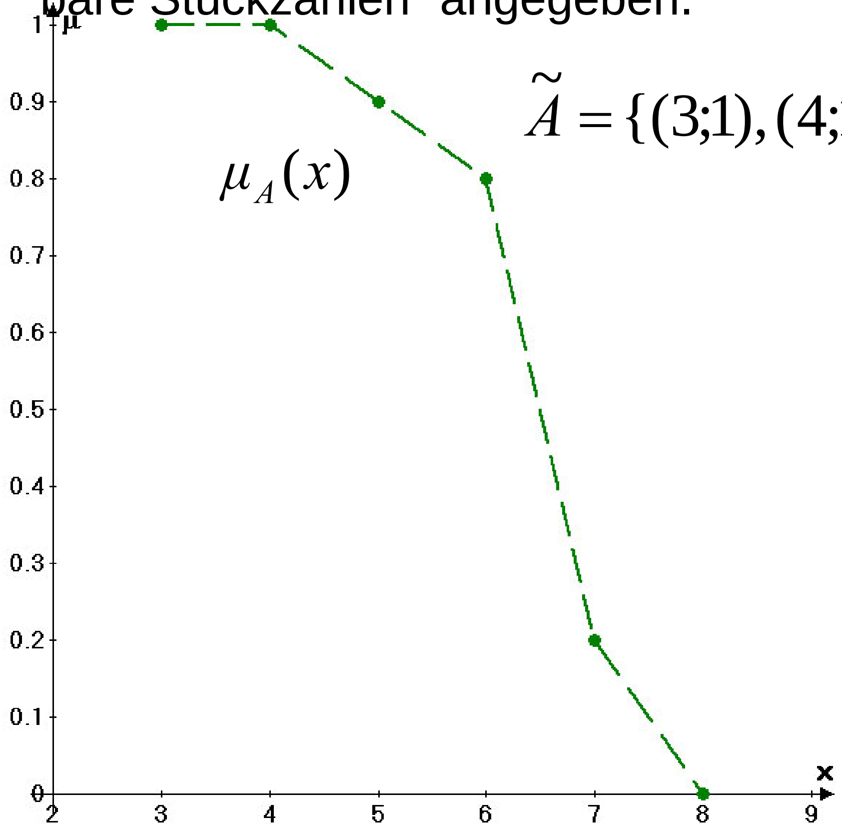
Die Bewertungsfunktion (synonym: Zugehörigkeitsfunktion) bildet also X in das Intervall [0,1] ab: $\mu_S : X \rightarrow [0;1]$



$$\tilde{S} = \{(3;0),(4;0,4),(5;1),(6;0,6),(7;0,5),(8;0)\}$$

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (III)

Die Bewertung „Tagesproduktion zu vertretbaren Stückkosten“ wird unter der Annahme vorgenommen, alle an einem Tag produzierten seien auch zu dem angegebenen Marktpreis absetzbar. Ist dies nicht der Fall, müsste eine neue Bewertung der Kostenseite stattfinden. Es sei die folgende Bewertungsfunktion des Analysten bezüglich der unscharfen Menge „pro Tag absetzbare Stückzahlen“ angegeben.



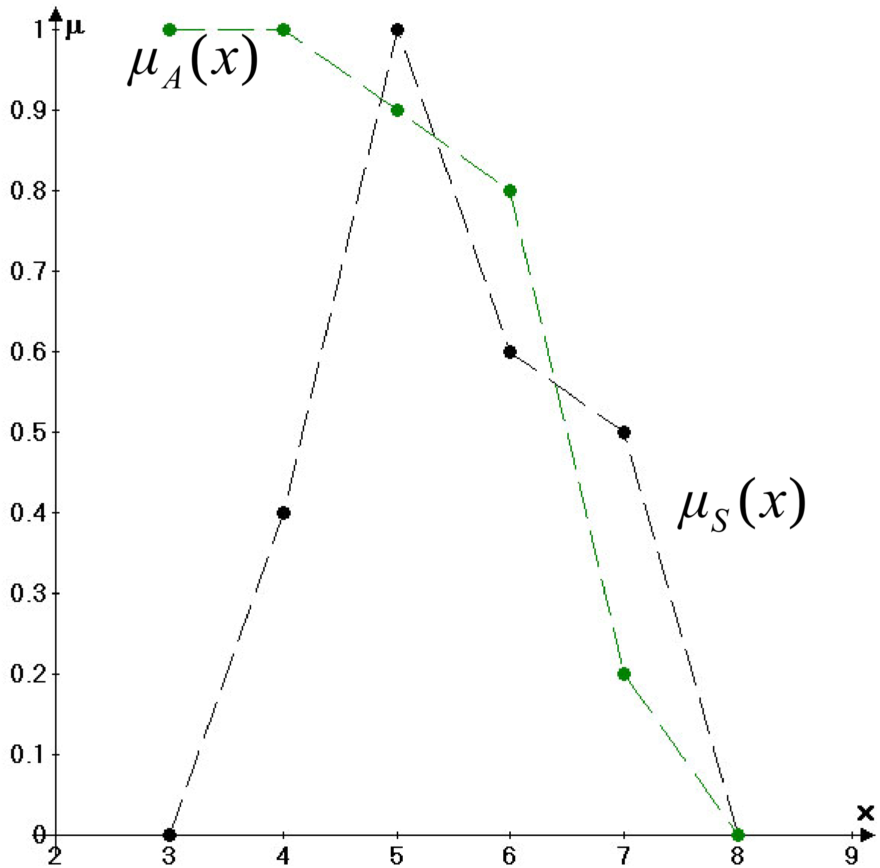
$$\tilde{A} = \{(3;1),(4;1),(5;0,9),(6;0,8),(7;0,2),(8;0)\}$$

1. Weiche Planung

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (IV)

Nun sollen die Bewertungsfunktionen des Entscheiders und des Analysten „zusammen geführt“ werden, um dann eine Bewertung darüber zu haben, welche Stückzahlen pro Tag „vertretbare Stückkosten“ aufweisen und „absetzbar“ sind.

Frage: Wie aggregiert man Zugehörigkeitsfunktionen?



1. Weiche Planung

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (V)

Zunächst muss geklärt werden, ob das sprachliche „und“ bedeutet, dass

a) die Stückzahl „vertretbare Stückkosten“ aufweist ODER „absetzbar“ ist

b) die Stückzahl „vertretbare Stückkosten“ aufweist UND „absetzbar“ ist

In diesem Fall würde man das sprachliche „und“ sofort als das logische UND interpretieren. Es lassen sich aber auch Beispiele finden, in denen auch Interpretation a) sinnvoll wäre.

$\Rightarrow$ Interpretation bestimmt die Form der Aggregation der Zugehörigkeitsfunktionen

1. Weiche Planung

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (VI)

Interpretiert man das „und“ als logischen Operator ODER, so kann die Aggregation der Zugehörigkeitsfunktionen mittels der Vereinigung der beiden unscharfen Mengen $\tilde{S}$ und $\tilde{A}$ erfolgen.

Der Operator zur Vereinigung zweier unscharfer Mengen ist der Maximum-Operator.

Es gilt also für die Vereinigung von $\tilde{S}$ und $\tilde{A}$:

$$\mu_{S \cup A} = \max\left(\mu_S(x), \mu_A(x)\right)$$

1. Weiche Planung

Unscharfe Mengen

Unscharfe LOP

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (VII)

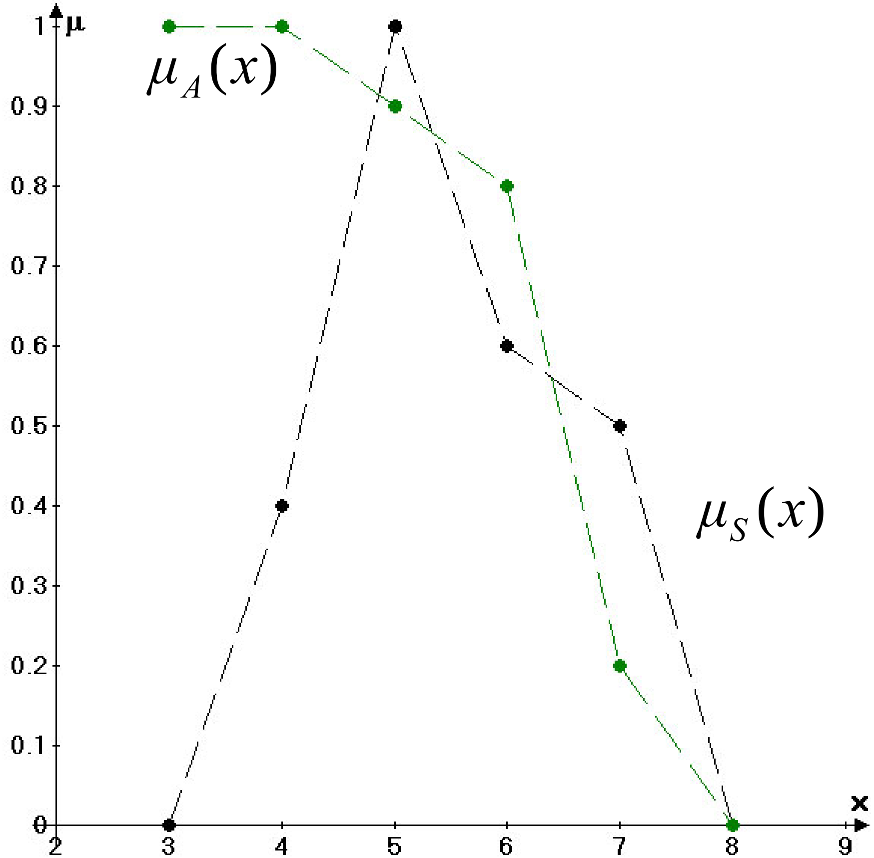
Die beiden Zugehörigkeitsfunktionen lauteten:

$$\tilde{S} = \{(3;0),(4;0{,}4),(5;1),(6;0{,}6),(7;0{,}5),(8;0)\}$$

Tagesproduktion mit vertretbaren Stückkosten

$$\tilde{A} = \{(3;1),(4;1),(5;0{,}9),(6;0{,}8),(7;0{,}2),(8;0)\}$$

Pro Tag absetzbare Wagen



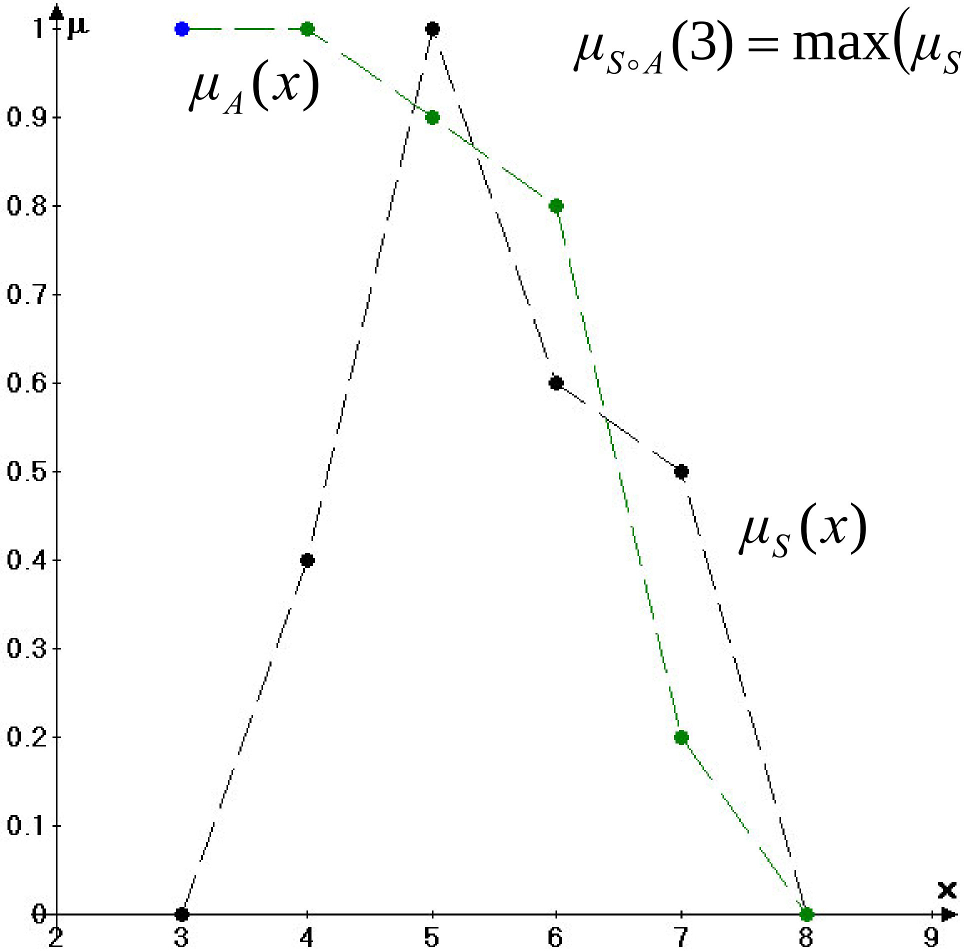
1. Weiche Planung

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (VIII)

$$\tilde{S} = \{(3;0),(4;0{,}4),(5;1),(6;0{,}6),(7;0{,}5),(8;0)\}$$ Tagesproduktion mit vertretbaren Stückkosten

$$\tilde{A} = \{(3;1),(4;1),(5;0{,}9),(6;0{,}8),(7;0{,}2),(8;0)\}$$ Pro Tag absetzbare Wagen

$$\mu_{S \circ A}(3) = \max\left(\mu_S(3), \mu_A(3)\right) = \max(0;1) = 1$$



Unscharfe Mengen

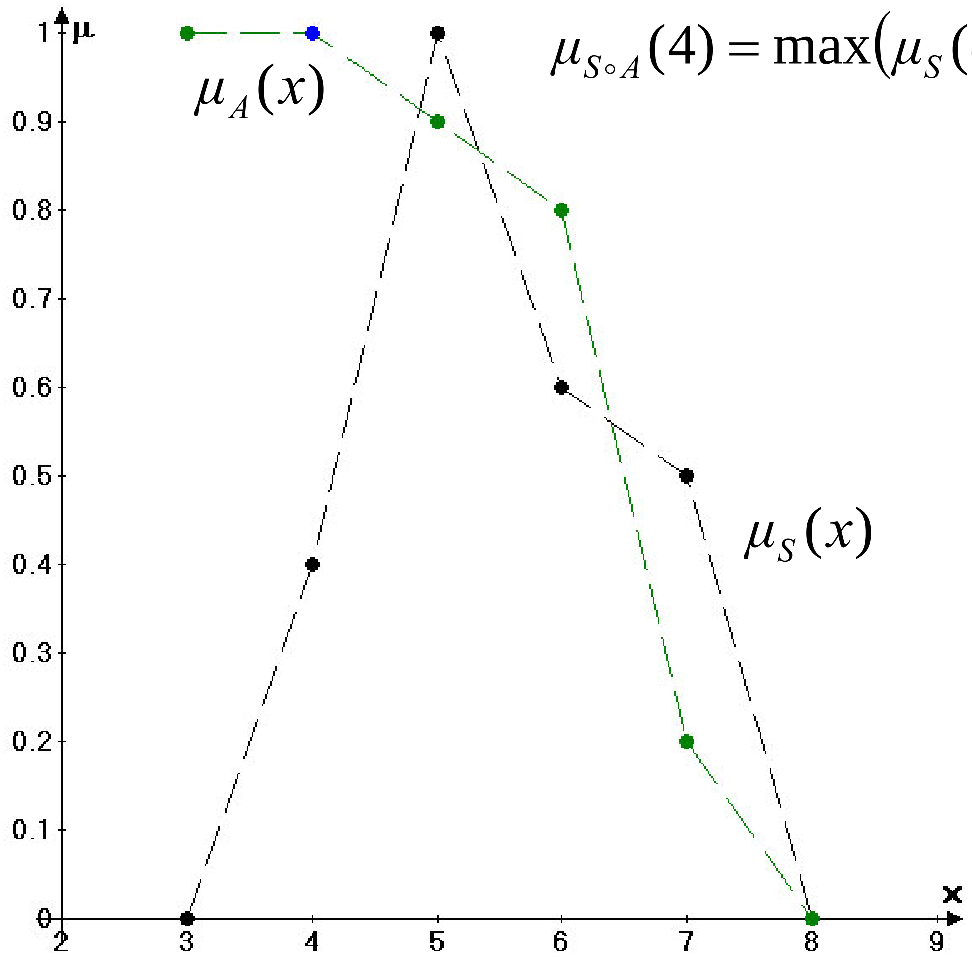
Unscharfe LOP

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (VIII)

$$\tilde{S} = \{(3;0),(4;0{,}4),(5;1),(6;0{,}6),(7;0{,}5),(8;0)\}$$ Tagesproduktion mit vertretbaren Stückkosten

$$\tilde{A} = \{(3;1),(4;1),(5;0{,}9),(6;0{,}8),(7;0{,}2),(8;0)\}$$ Pro Tag absetzbare Wagen

$$\mu_{S\circ A}(4) = \max\left(\mu_S(4), \mu_A(4)\right) = \max(0{,}4;1) = 1$$



1. Weiche Planung

Unscharfe Mengen

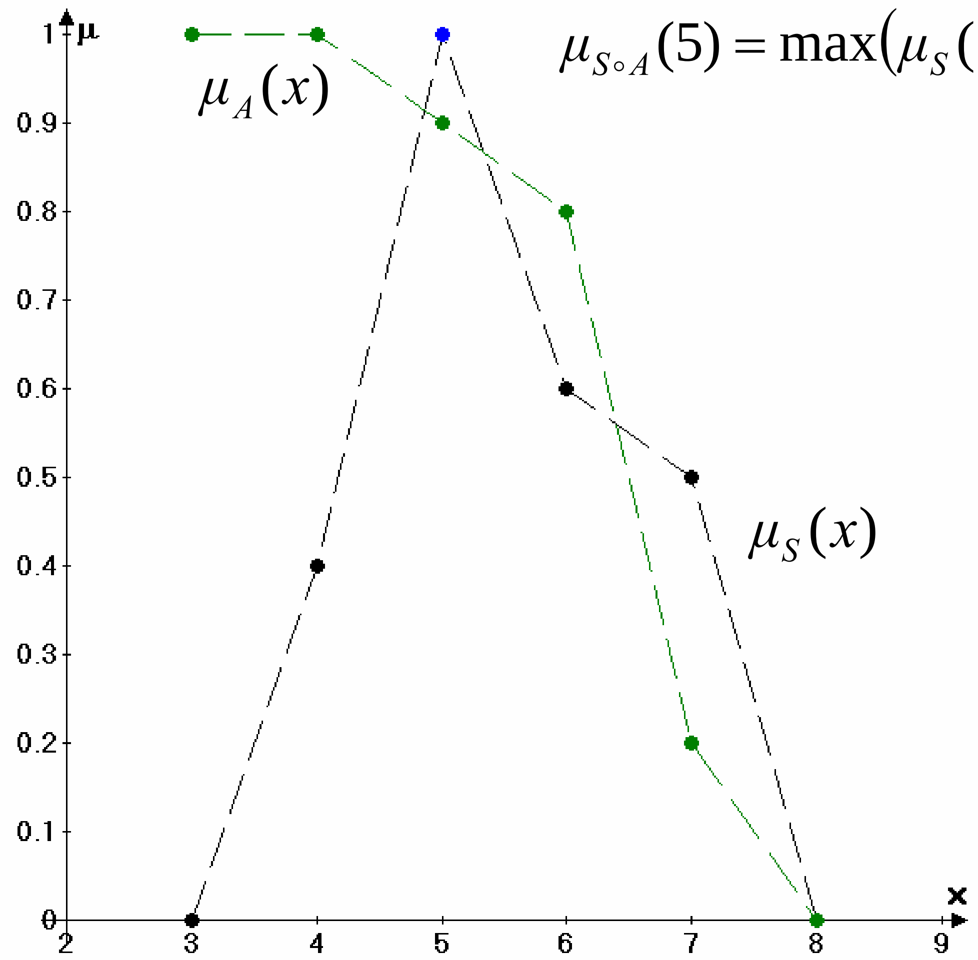
Unscharfe LOP

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (IX)

$$\tilde{S} = \{(3;0),(4;0{,}4),(5;1),(6;0{,}6),(7;0{,}5),(8;0)\}$$ Tagesproduktion mit vertretbaren Stückkosten

$$\tilde{A} = \{(3;1),(4;1),(5;0{,}9),(6;0{,}8),(7;0{,}2),(8;0)\}$$ Pro Tag absetzbare Wagen

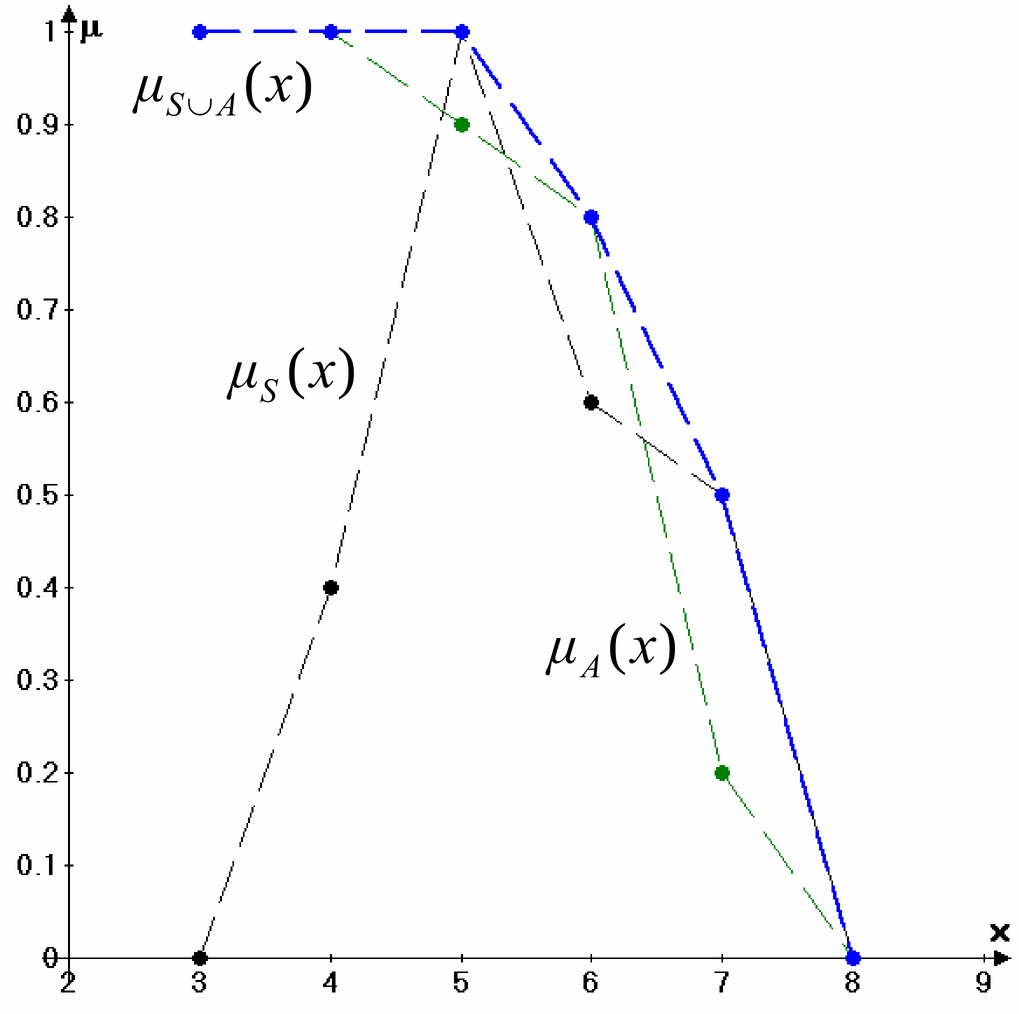
$$\mu_{S\circ A}(5) = \max\left(\mu_S(5), \mu_A(5)\right) = \max(1;0{,}9) = 1$$



1. Weiche Planung

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (X)

Die neue Zugehörigkeitsfunktion, die aus der Komposition der beiden unscharfen Mengen (Vereinigung) durch Anwendung des Maximum-Operators:



1. Weiche Planung

Unscharfe Mengen

Unscharfe LOP

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (XI)

Interpretiert man das „und“ als logischen Operator UND, so kann die Aggregation der Zugehörigkeitsfunktionen mittels des Durchschnitts der beiden unscharfen Mengen $\tilde{S}$ und $\tilde{A}$ erfolgen.

Der Operator zur Bildung des Durchschnitts zweier unscharfer Mengen ist der Minimum-Operator.

Es gilt also für den Durchschnitt von $\tilde{S}$ und $\tilde{A}$:

$$\mu_{S \cap A} = \min\left(\mu_S(x), \mu_A(x)\right)$$

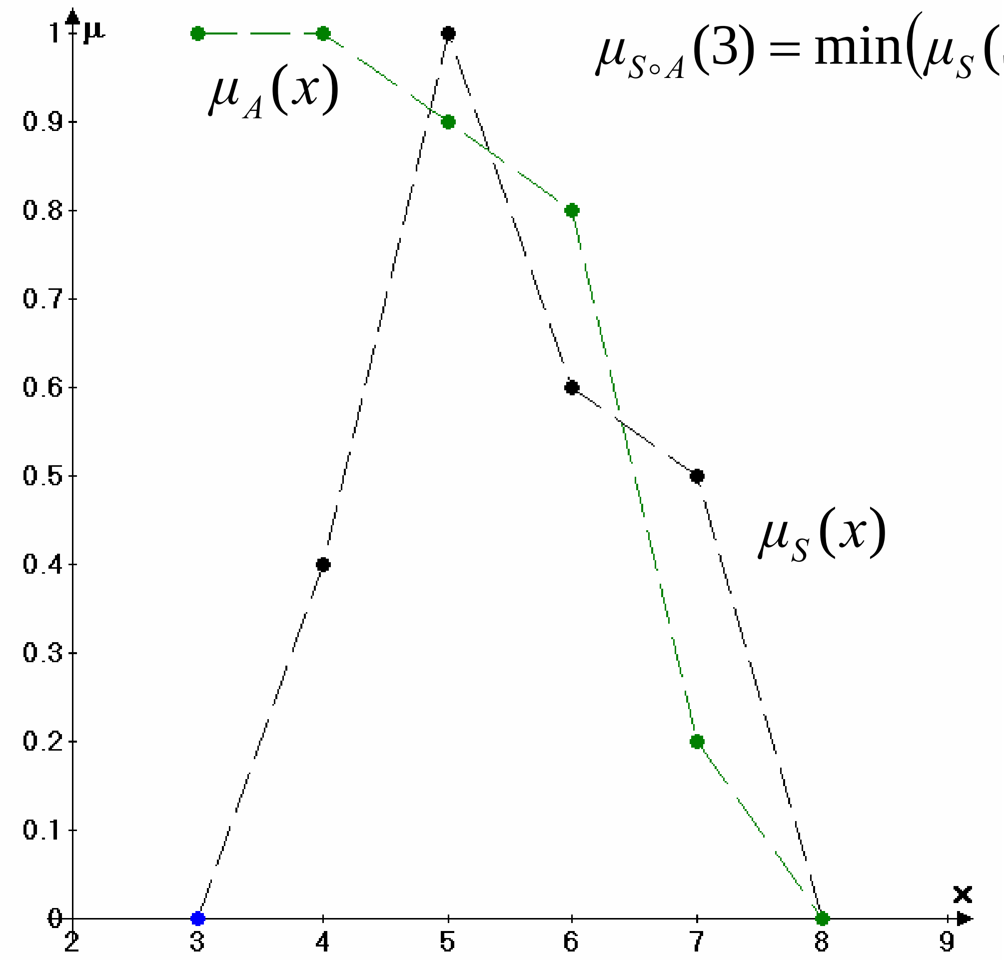
1. Weiche Planung

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (XII)

$$\tilde{S} = \{(3;0),(4;0{,}4),(5;1),(6;0{,}6),(7;0{,}5),(8;0)\}$$ Tagesproduktion mit vertretbaren Stückkosten

$$\tilde{A} = \{(3;1),(4;1),(5;0{,}9),(6;0{,}8),(7;0{,}2),(8;0)\}$$ Pro Tag absetzbare Wagen

$$\mu_{S \circ A}(3) = \min\big(\mu_S(3), \mu_A(3)\big) = \min(0;1) = 0$$



1. Weiche Planung

Unscharfe Mengen

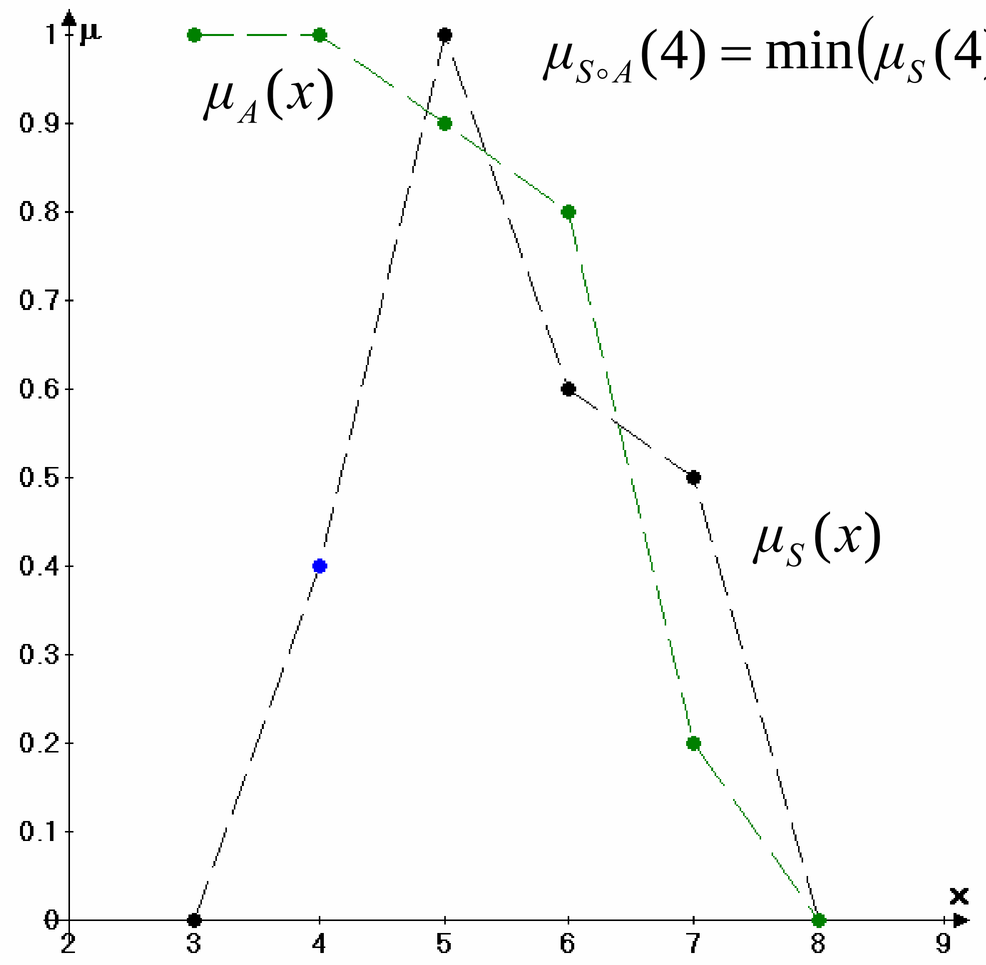
Unscharfe LOP

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (XII)

$$\tilde{S} = \{(3;0),(4;0{,}4),(5;1),(6;0{,}6),(7;0{,}5),(8;0)\}$$ Tagesproduktion mit vertretbaren Stückkosten

$$\tilde{A} = \{(3;1),(4;1),(5;0{,}9),(6;0{,}8),(7;0{,}2),(8;0)\}$$ Pro Tag absetzbare Wagen

$$\mu_{S\circ A}(4) = \min\left(\mu_S(4), \mu_A(4)\right) = \min(0{,}4;1) = 0{,}4$$



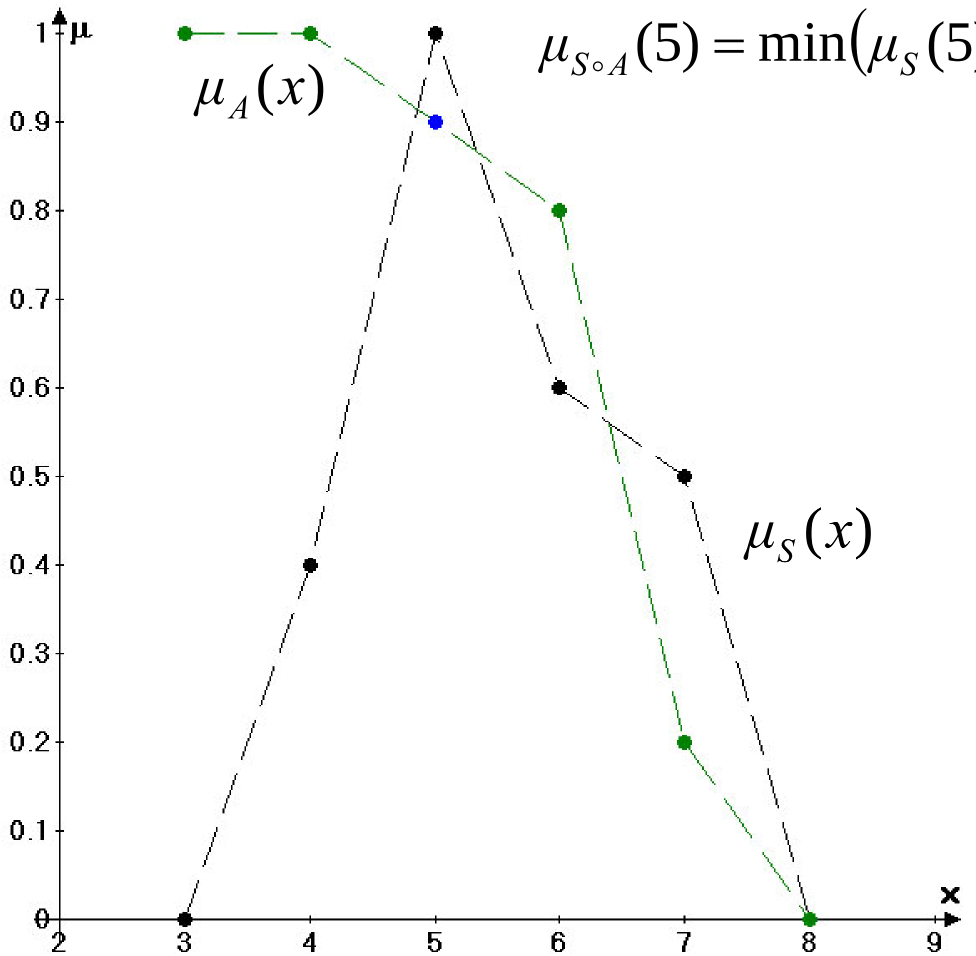
1. Weiche Planung

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (XII)

$$\tilde{S} = \{(3;0),(4;0,4),(5;1),(6;0,6),(7;0,5),(8;0)\}$$ Tagesproduktion mit vertretbaren Stückkosten

$$\tilde{A} = \{(3;1),(4;1),(5;0,9),(6;0,8),(7;0,2),(8;0)\}$$ Pro Tag absetzbare Wagen

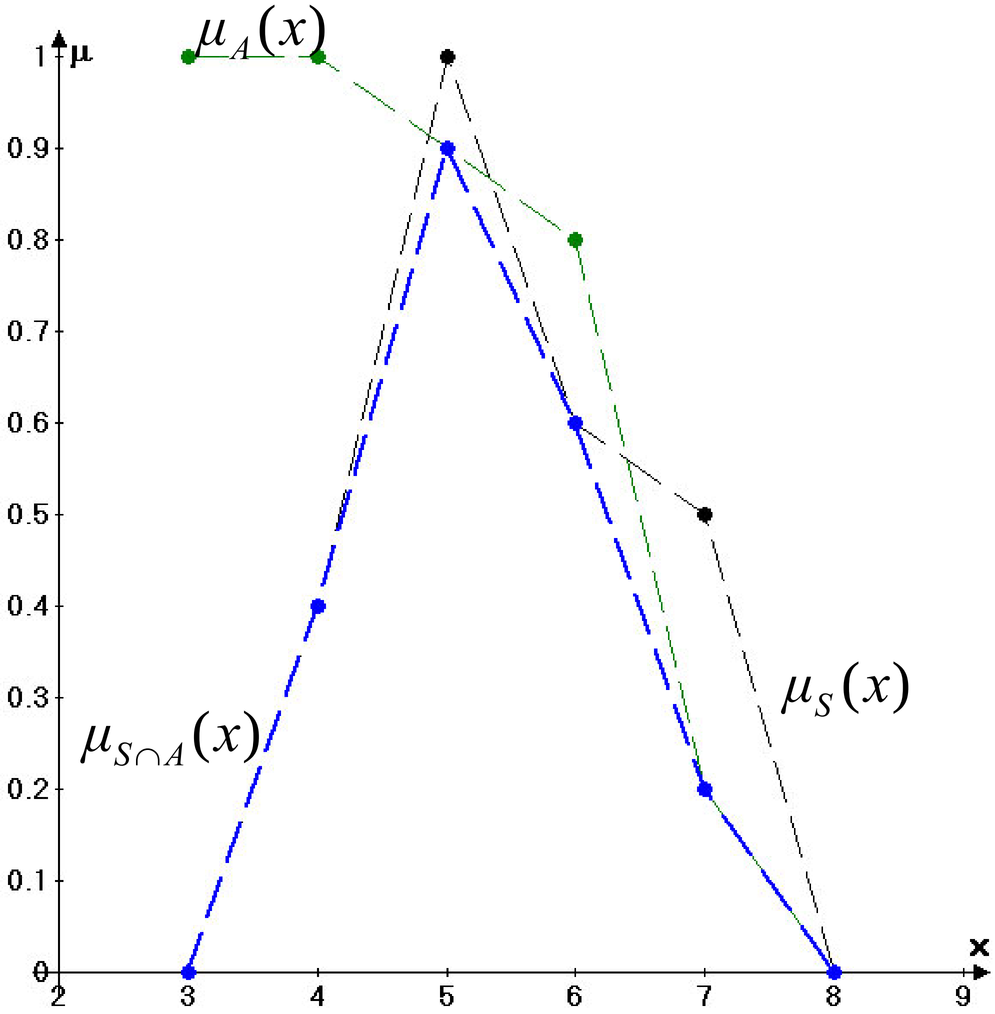
$$\mu_{S \circ A}(5) = \min(\mu_S(5), \mu_A(5)) = \min(1;0,9) = 0,9$$



1. Weiche Planung

Beispiel 1: Unscharfe und scharfe Zielwerte (X)

Die neue Zugehörigkeitsfunktion, die aus der Komposition der beiden unscharfen Mengen (Durchschnitt) durch Anwendung des Minimum-Operators:



1. Weiche Planung

Beispiel 2: Komposition von unscharfen Relationen (I)

Es seien die zwei unscharfen Relationen $\tilde{R}_1$ und $\tilde{R}_2$ gegeben, die den Zusammenhang zwischen

a) Medium X_1 und Reichweite X_2

b) Reichweite und Absatzwirkung des beworbenen Produktes X_3

beschreiben.

$\tilde{R}_1$:

$x_1 \backslash x_2$	Niedrig	Mittel	Hoch
Fach-zeitschrift	1,0	0,3	0,0
Zeitung	0,2	0,6	0,9
Fern-sehen	0,1	0,8	1,0

$\tilde{R}_2$:

$x_2 \backslash x_3$	Schlecht	Gut
Niedrig	1,0	0,6
Mittel	0,4	0,8
Hoch	0,2	0,9

1. Weiche Planung

Beispiel 2: Komposition von unscharfen Relationen (III)

Die Komposition zweier unscharfer Relationen heißt

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \{(x_1, x_3), \mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, x_3) \mid (x_1, x_3) \in X_1 \times X_3\}$$

$$\text{mit } \mu_{R_1 \circ R_2} = \max_{x_2 \in X_2} \min\left(\mu_{R_1}(x_1, x_2), \mu_{R_2}(x_2, x_3)\right)$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(Fachzeitschrift, Schlecht)$$

$$= \max_{x_2 \in X_2} \min\begin{pmatrix} \mu_{R_1}(Fachzeitschrift, Niedrig), \mu_{R_2}(Niedrig, Schlecht); \\ \mu_{R_1}(Fachzeitschrift, Mittel), \mu_{R_2}(Mittel, Schlecht); \\ \mu_{R_1}(Fachzeitschrift, Hoch), \mu_{R_2}(Hoch, Schlecht) \end{pmatrix}$$

$$= \max_{x_2 \in X_2} \min\left((1{,}0\,;1{,}0);(0{,}3\,;0{,}4);(0{,}0\,;0{,}2)\right)$$

$$= \max_{x_2 \in X_2}\left(1{,}0\,;0{,}3\,;0{,}0\right)$$

$$= 1{,}0$$

Unscharfe Mengen

Unscharfe LOP

Beispiel 2: Komposition von unscharfen Relationen (II)

Die Komposition zweier unscharfer Relationen heißt

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \{(x_1, x_3), \mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, x_3) \mid (x_1, x_3) \in X_1 \times X_3\}$$

$$\text{mit } \mu_{R_1 \circ R_2} = \max_{x_2 \in X_2} \min\Big(\mu_{R_1}(x_1, x_2), \mu_{R_2}(x_2, x_3)\Big)$$

$\tilde{R}_1$:

$x_1 \backslash x_2$	Niedrig	Mittel	Hoch
Fach-zeitschrift	1,0	0,3	0,0
Zeitung	0,2	0,6	0,9
Fern-sehen	0,1	0,8	1,0

$\tilde{R}_2$:

$x_2 \backslash x_3$	Schlecht	Gut
Niedrig	1,0	0,6
Mittel	0,4	0,8
Hoch	0,2	0,9

$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$:

$x_1 \backslash x_3$	Schlecht	Gut
Fach-zeitschrift	1,0	0,6
Zeitung	0,4	0,9
Fern-sehen	0,4	0,9

Gliederung

1. Weiche Planung
   1.1. Theorie unscharfer Mengen
   1.2. Unscharfe lineare Optimierungsprobleme

2. Betriebswirtschaftliche Standardprobleme
   2.1. Übersicht der Probleme
   2.2. Exakte und heuristische Verfahren

3. Vom Realproblem zum Modell – Beispiele –
   3.1. Netzplantechnik
   3.2. Ganzzahlige Lineare Optimierungsprobleme
   3.3. Lineare Optimierungsprobleme

1. Weiche Planung

Unscharfe Optimierungsmodelle

In vielen praktischen Anwendungsfällen kann der Entscheider aufgrund von unvollständigen Informationen seine *Zielvorstellungen* nur vage angeben.

Außerdem sind die *Restriktionen* nicht unbedingt strikt, sondern eher weich, weil bspw. eine Erhöhung der Kapazitäten durch Mieten von Maschinen etc. ermöglicht werden kann.

Der Entscheider muss zumindest in der Lage sein, Intervalle anzugeben sowie seine Zugehörigkeitsfunktionen zu formulieren.

Trifft man die Annahmen

- das Optimierungsproblem ist linear
- der Entscheider kann Fuzzy-Intervalle mit $[b_i;b_i+d_i]$ angeben
- die Zugehörigkeitsfunktion ist monoton fallend in [bi;bi+di]

so kann man das unscharfe LOP wie folgt formulieren.

1. Weiche Planung

Unscharfe Mengen

Unscharfe LOP

Unscharfe lineare Optimierungsprobleme (I)

Wie schon erwähnt können unscharfe Forderungen bezüglich

- der Zielvorstellungen
- der Ressourcenverzehre

bestehen.

Für den Zielwert $x_0 = c^T x$ soll gelten, dass er möglichst oberhalb einer Schranke $\bar{x}_0$ liegen soll, d.h. es gilt $\mu_0(\mathrm{x}) = 1$, falls $x_0 \geq \bar{x}_0$ und $\mu_0(\mathrm{x}) = 0$, falls x_0 unter der unteren Grenze $x_0 < \bar{x}_0 - p_0$ liegt.

Da wir unterstellen, dass die Zugehörigkeitsfunktion linear in x ist,

Können wir sie wie folgt formulieren:

$$\mu_0(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad c^T x \geq \bar{x}_0 \\ 1 - \dfrac{\bar{x}_0 - c^T x}{p_0} & \text{für} \quad \bar{x}_0 - p_0 \leq c^T x \leq \bar{x}_0 \\ 0 & \text{für} \quad c^T x < \bar{x}_0 - p_0 \end{cases}$$

1. Weiche Planung

Unscharfe Mengen

Unscharfe LOP

Unscharfe lineare Optimierungsprobleme (I)

Für die Ressourcenverzehre Ax soll gelten, dass sie möglichst unterhalb einer Schranke b liegen sollen, d.h. es gilt $\mu_i(\mathrm{x}) = 1\ (i = 1,..,m)$, falls $\mathrm{Ax} \le \mathrm{b}$ und $\mu_i(\mathrm{x}) = 0$,falls $\mathrm{Ax} > \mathrm{b} + \mathrm{p}$

Wir unterstellen erneut, dass die Zugehörigkeitsfunktionen linear in x sind.

$$\mu_i(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad (\mathrm{Ax})_i \le \mathrm{b}_i \\ 1 - \dfrac{(\mathrm{Ax})_i - \mathrm{b}_i}{\mathrm{p}_i} & \text{für} \quad \mathrm{b}_i \le (\mathrm{Ax})_i \le \mathrm{b}_i + \mathrm{p}_i \\ 0 & \text{für} \quad (\mathrm{Ax})_i > \mathrm{b}_i + \mathrm{p}_i \end{cases}$$

1. Weiche Planung

Unscharfe Mengen

Unscharfe LOP

Unscharfe lineare Optimierungsprobleme (II)

Eine kompaktere Schreibweise kann man wählen, setzt man

$$B = \begin{pmatrix} -c^T \\ A \end{pmatrix} \text{ und } d = \begin{pmatrix} -\bar{x}_0 \\ b \end{pmatrix} .$$

Man kann dann die unscharfen Forderungen bezüglich der Zielwerte sowie der Ressourcenverzehre durch folgende Zugehörigkeitsfunktionen ausdrücken:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad (Bx)_i \leq d_i \\ 1 - \dfrac{(Bx)_i - d_i}{p_i} & \text{für} \quad d_i \leq (Bx)_i \leq d_i + p_i \\ 0 & \text{für} \quad (Bx)_i > d_i + p_i \end{cases}$$

$$\text{für } i = 0,..,m$$

1. Weiche Planung

Unscharfe lineare Optimierungsprobleme (III)

Wie schon erwähnt erfolgt nun eine Aggregation der Zugehörigkeitsfunktion mittels des Minimum-Operators, da man eine und-Verknüpfung unterstellt.

$$\min_i \mu_i(\mathrm{x}) \text{ unter den Nebenbedingungen } \mathrm{x} \geq 0$$

Man wählt nun die Lösung mit dem maximalem Zugehörigkeitsgrad, also

$$\max \min_i \mu_i(\mathrm{x}).$$

Liegt das Maximum zwischen 0 und 1, so kann man das Problem auf ein LOP zurück führen, indem man eine neue Variable, λ , einführt.

$$\max \lambda$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen}$$

$$\lambda \leq \mu_i(\mathrm{x}) \quad \forall i = 0, \ldots, m$$

$$\mathrm{x} \geq 0$$

1. Weiche Planung

Unscharfe lineare Optimierungsprobleme (IV)

Eine Industrieunternehmung plant die Herstellung von drei nicht teilbaren Produkten P*j*, *j*=1,…,3. Die folgende Tabelle gibt die jeweiligen Stückverbräuche an zwei Faktoren F_1 und F_2 sowie die jeweiligen Stückdeckungsbeiträge StDB an.

	F_1	F_2	StDB [GE]
P_1	2,0	3,0	3,20
P_2	0,9	1,5	2,00
P_3	7,0	5,0	4,80

Der Entscheider äußert nun folgende unscharfen Forderungen:

- Der Gesamtbedarf an Faktor F_1 sollte möglichst 22.000 [ME] nicht überschreiten, auch wenn die Kapazitätsgrenze bei 25.000 [ME] liegt.
- Von Faktor F_2 soll möglichst wenig, höchstens aber 43.000 [ME] verbraucht werden.
- Die Ausbringungsmenge von P_2 soll das 1,5- bis 1,8-fache derjenigen von P_3 sein.
- Der Gesamtdeckungsbeitrag soll möglichst 15.000 [GE] überschreiten, weniger 13.000 [GE] wären unakzeptabel.

1. Weiche Planung

Unscharfe lineare Optimierungsprobleme (V)

Das Fuzzy-LP lautet:

$$\max \lambda$$

- Der Gesamtbedarf an Faktor F_1 sollte möglichst 22.000 [ME] nicht überschreiten, auch wenn die Kapazitätsgrenze bei 25.000 [ME] liegt.

$$2{,}0x_1 + 0{,}9x_2 + 7{,}0x_3 + 2000\lambda \le 25000$$

- Von Faktor F_2 soll möglichst wenig, höchstens aber 43.000 [ME] verbraucht werden.

$$3{,}0x_1 + 1{,}5x_2 + 5{,}0x_3 + 43000\lambda \le 43000$$

- Die Ausbringungsmenge von P_2 soll das 1,5- bis 1,8-fache derjenigen von P3 sein.

$$1{,}5x_3 - x_2 \le 0$$

$$x_2 - 1{,}8x_3 \le 0$$

- Der Gesamtdeckungsbeitrag soll möglichst 15.000 [GE] überschreiten, weniger 13.000 [GE] wären unakzeptabel.

$$3{,}2x_1 + 2{,}0x_2 + 4{,}8x_3 - 2000\lambda \ge 13000$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Gliederung

1. Weiche Planung
   1.1. Theorie unscharfer Mengen
   1.2. Unscharfe lineare Optimierungsprobleme

2. Betriebswirtschaftliche Standardprobleme
   2.1. Übersicht der Probleme
   2.2. Exakte und heuristische Verfahren

3. Vom Realproblem zum Modell – Beispiele –
   3.1. Netzplantechnik
   3.2. Ganzzahlige Lineare Optimierungsprobleme
   3.3. Lineare Optimierungsprobleme

2. Betriebswirtschaftliche Standardprobleme

Standardprobleme (I)

Im Folgenden soll eine kurze Übersicht über OR-Standardprobleme, die im Rahmen des PET-Kurses angesprochen werden, erfolgen. Dabei werden diese Probleme aufgrund ihrer Struktur klassifiziert und (bekannte) Verfahren zur Lösung des Formalproblems genannt.

Anwendungsbezogene Problemstellungen können auf solche Standardprobleme reduziert werden und sind somit leichter handhabbar.

Lineare Optimierungsprobleme	
	Produktionsplanung
$\max \sum_{j=1}^{n} \left(p_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot q_i \right)$	Deckungsbeitragsmaximierung
$\min \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot x_j$	Kostenminimierung
$s.d.$	
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq \bar{r}_i \ \forall i = 1,..,m$	
$x_j \geq 0 \ \forall i = 1,..,n$	

Standard-probleme

Verfahren

Standardprobleme (II)

$\min \sum_{i\in V} \sum_{j\in N(i)} c_{ij} \cdot x_{ij}$ $s.d.$ $\sum_{j\in N(i)} x_{ij} - \sum_{l\in N(i)} x_{li} \geq a_i \text{ für } i \in V_1$ $\sum_{j\in N(i)} x_{ij} - \sum_{l\in N(i)} x_{li} = 0 \text{ für } i \in V_2$ $\sum_{j\in N(i)} x_{ij} - \sum_{l\in N(i)} x_{li} \leq \mathrm{b_i} \text{ für } i \in V_3$ $0 \leq x_{ij} \leq \kappa_{ij} \text{ für alle } (i,j)$	Transport- und Güterflussplanung Minimum-Fluss-Problem
$\min \sum_{i\in V_1} \sum_{j\in N(i)} c_{ij} \cdot x_{ij}$ $s.d.$ $\sum_{j\in N(i)} x_{ij} \leq a_i \text{ für } i \in V_1$ $\sum_{i\in N(j)} x_{ij} \geq b_j \text{ für } i \in V_3$ $0 \leq x_{ij} \leq \kappa_{ij} \text{ für alle } (i,j)$	Transportproblem

Standard-
probleme

Verfahren

Standardprobleme (III)

Nichtlineare Optimierungsprobleme	
$\max \sum_j E_j \cdot x_j - \left(\sum_i \sum_j x_i x_j Cov(AN_i, AN_j) \right)$ $s.d.$ $\sum_j x_j = 1$ $x_j \geq 0$	Quadratisches Programm, bspw. Portfolio-Planung
$\max q(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{c}^T \mathrm{x} + \mathrm{c}_0}{\mathrm{d}^T \mathrm{x} + \mathrm{d}_0}$ $s.d.$ $\mathrm{Ax} \leq \mathrm{b}$ $\mathrm{x} \geq 0$	Quotientenprogramm

2. Betriebswirtschaftliche Standardprobleme

Standard-
probleme

Verfahren

Standardprobleme (IV)

Ganzzahlige Optimierungsprobleme	
$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $s.d.$ $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$ x_j ganzzahlig	Knapsackproblem
$\min r = \sum_{i=1}^{m} r_i$ $\min REST = \sum_{i=1}^{m} REST_i \cdot r_i$ $s.d.$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot r_i \geq \bar{x}_j \quad \forall j = 1,\dots,n$ r_i ganzzahlig	Verschnittproblem Minimierung des Faktoreinsatzes Minimierung des Verschnitts

Gliederung

1. Weiche Planung
   1.1. Theorie unscharfer Mengen
   1.2. Unscharfe lineare Optimierungsprobleme

2. Betriebswirtschaftliche Standardprobleme
   2.1. Übersicht der Probleme
   2.2. Exakte und heuristische Verfahren

3. Vom Realproblem zum Modell – Beispiele –
   3.1. Netzplantechnik
   3.2. Ganzzahlige Lineare Optimierungsprobleme
   3.3. Lineare Optimierungsprobleme

2. Betriebswirtschaftliche Standardprobleme

Exakte und heuristische Verfahren

Als exakt werden Verfahren bezeichnet, für die ein Konvergenzbeweis existiert. Bei geeigneten Optimierungsproblemen führen exakte Verfahren zu optimalen Lösungen, sofern solche existieren.
Als „geeignet“ werden die Probleme bezeichnet, die nicht np-schwer sind, d.h. in polynomialer Rechenzeit gelöst werden können.
Kombinatorische Optimierungsprobleme sind dagegen np-schwer. Daher sind Heuristiken zu ihrer Lösung geeignet, weil diese zwar nicht garantiert optimale Lösungen finden, jedoch zumindest „gute“.

Als typisches kombinatorisches Optimierungsproblem stellt der Kurs das Rundreiseproblem vor und zeigt ein Eröffnungsverfahren – Nächster-Nachbar – und ein Verbesserungsverfahren – 2-opt.

Gliederung

Netzplantechnik (I)

Ein produzierendes Gewerbe muss eine alte Fertigungsanlage durch eine neue ersetzen. Während Angebote eingeholt und verglichen werden (A, 25 Tage), kann die alte Anlage demontiert und entsorgt werden (B, 8 Tage). Nach ihrer Demontage muss das alte Maschinenfundament beseitigt und der Boden für das neue vorbereitet werden (C, 5 Tage). Ist die Entscheidung für eine Neuanschaffung gefallen, so muss das Fundament für die Maschine konstruiert werden (D, 9 Tage). Nachdem der Boden für das neue Fundament vorbereitet ist und die Konstruktionspläne vorliegen, kann das Fundament errichtet werden (F, 9 Tage). Nach der Entscheidung für die neue Anlage wurde sofort die Bestellung vorgenommen, welche eine Lieferzeit von 21 Tagen hat (E). Nach Lieferung der Anlage und Errichtung des Fundaments kann sie installiert werden (G, 6 Tage). Nach Beschluss der Neuanschaffung beginnen direkt die Schulungen der Mitarbeiter für die Bedienung der neuen Anlage (H, 15 Tage). Nach der Installation müssen noch die elektrischen Anschlüsse gelegt und geprüft werden (I, 2 Tage). Sind die Mitarbeiter geschult, kann der erste Probelauf mit der Maschine vorgenommen werden (J, 1 Tag). Nach erfolgreichem Lauf erfolgt die Endabnahme und eine ausgiebige Feier (K, 2 Tage).

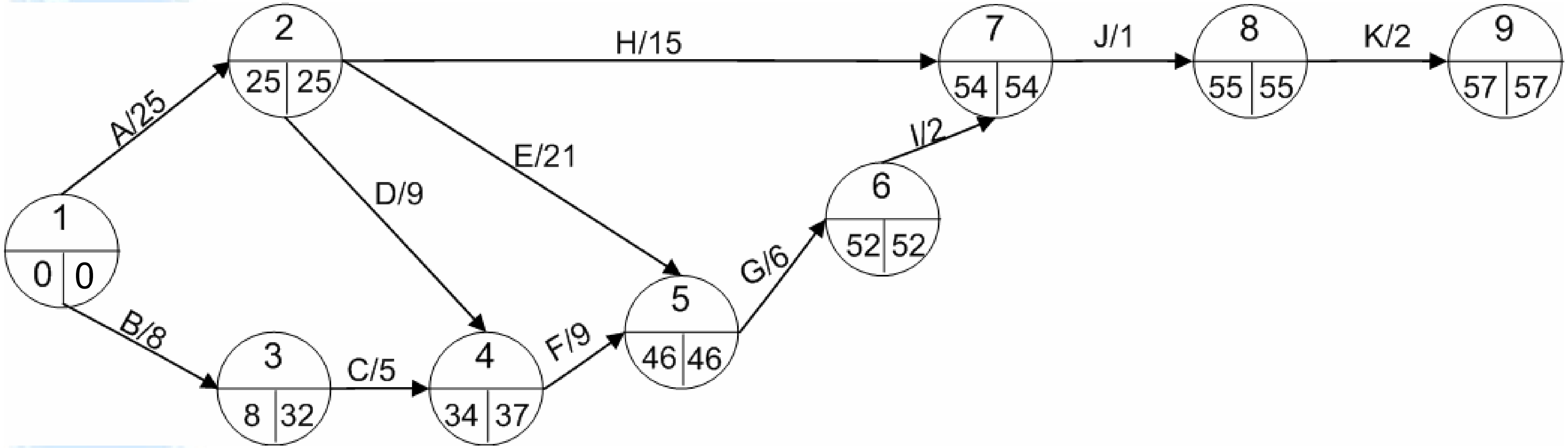
3. Vom Realproblem zum Modell

Netzplantechnik (II)

Erstellung der Vorgangsliste anhand der Angaben aus der Projekt-beschreibung

Vorgang	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Dauer [ZE]	25	8	5	9	21	9	6	15	2	1	2
Vorgänger	-	-	B	A	A	C,D	E,F	A	G	I,H	J

CPM-Netzplan



3. Vom Realproblem zum Modell

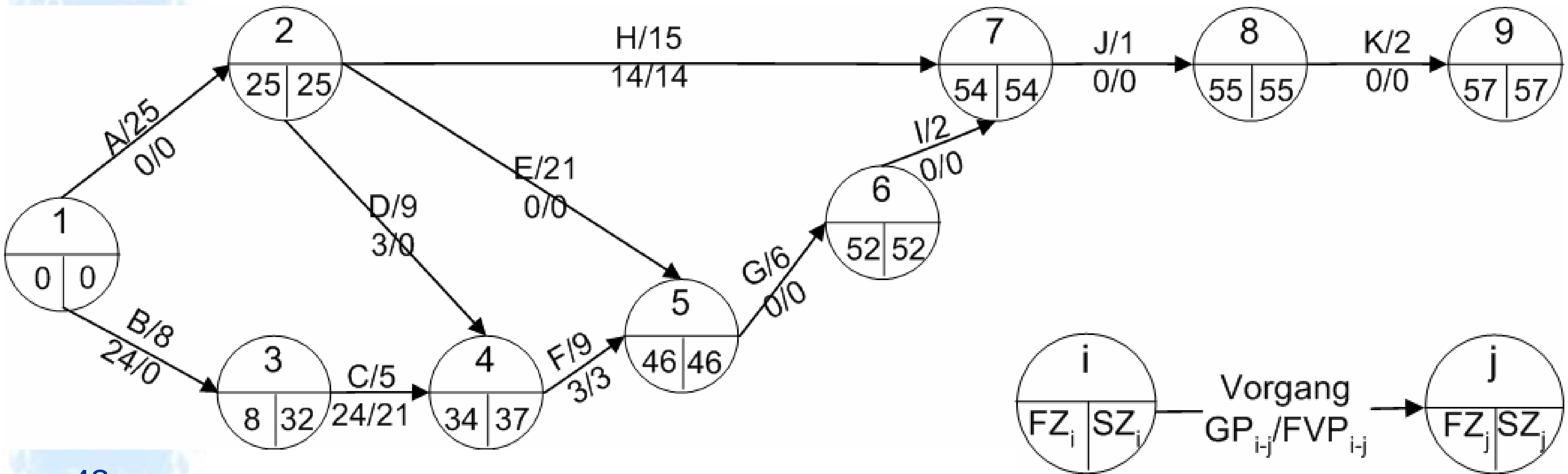
Netzplantechnik (III)

Bestimmung des Freien Vorwärtspuffers und Gesamtpuffers

Vorgang	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Dauer [ZE]	25	8	5	9	21	9	6	15	2	1	2
Vorgänger	-	-	B	A	A	C,D	E,F	A	G	I,H	J

$$GP_{i-j} := SZ_j - FZ_i - D_{i-j}$$

$$FVP_{i-j} := FZ_j - FZ_i - D_{i-j}$$

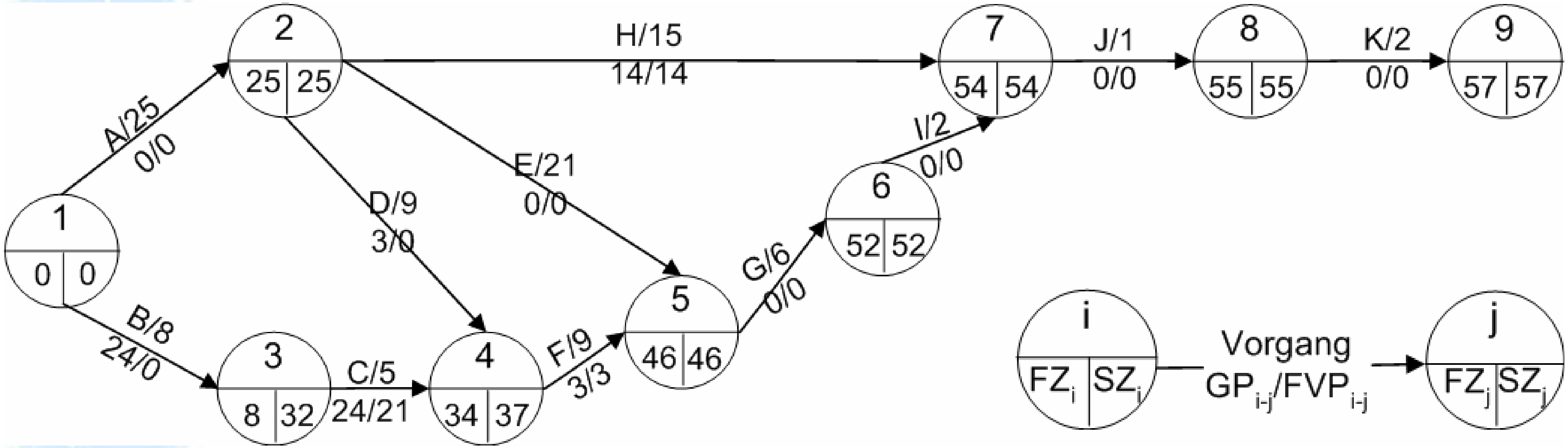


3. Vom Realproblem zum Modell

Netzplantechnik (IV)

Bestimmung des kritischen Pfads

Vorgang	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Dauer [ZE]	25	8	5	9	21	9	6	15	2	1	2
Vorgänger	-	-	B	A	A	C,D	E,F	A	G	I,H	J



Kritischer Pfad: A – E – G – I – J - K

Gliederung

1. Weiche Planung
   1.1. Theorie unscharfer Mengen
   1.2. Unscharfe lineare Optimierungsprobleme

2. Betriebswirtschaftliche Standardprobleme
   2.1. Übersicht der Probleme
   2.2. Exakte und heuristische Verfahren

3. Vom Realproblem zum Modell – Beispiele –
   3.1. Netzplantechnik
   3.2. Ganzzahlige Lineare Optimierungsprobleme
   3.3. Lineare Optimierungsprobleme

3. Vom Realproblem zum Modell

Ganzzahlige Optimierungsprobleme (I)

Ein Getränkehersteller plant den Einsatz einer Abfüllmaschine. Ihm stehen drei Schablonen für die Aufnahme von bis zu vier verschiedenen Flaschentypen in unterschiedlichen Anzahlen zur Verfügung.

Die unten stehende Tabelle gibt die Anzahlen der verschiedenen Flaschentypen bei Befüllung einer kompletten Schablone sowie den abzudeckenden Gesamtbedarf je Behältnistyp für den Planungszeitraum an.

	Anzahl enthaltener Leerbehälter vom Typ			
Schablone	Typ 0,33 l	Typ 0,5 l	Typ 1,0 l	Typ 1,5 l
Nr. 1	80	15	60	50
Nr. 2	0	45	100	31
Nr. 3	220	72	30	20
Bedarf	12.000	8.500	9.000	7.250

Ganzzahlige Lineare Optimierungsprobleme (II)

	Anzahl enthaltener Leerbehälter vom Typ			
Schablone	Typ 0,33 l	Typ 0,5 l	Typ 1,0 l	Typ 1,5 l
Nr. 1	80	15	60	50
Nr. 2	0	45	100	31
Nr. 3	220	72	30	20
Bedarf	12.000	8.500	9.000	7.250

Es ist ein mathematisches Modell aufzustellen, welches die Anzahl der benötigten Schablonenfüllungen minimiert und die angegebenen Bedarfe erfüllt.

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

$$s.d.$$

$$80x_1 + 0x_2 + 220x_3 \geq 12000$$

$$15x_1 + 45x_2 + 72x_3 \geq 8500$$

$$60x_1 + 100x_2 + 30x_3 \geq 9000$$

$$50x_1 + 31x_2 + 20x_3 \geq 7250$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ und ganzzahlig}$$

Ganzzahlige Lineare Optimierungsprobleme (III)

	Anzahl enthaltener Leerbehälter vom Typ				
Schablone	Typ 0,33 l	Typ 0,5 l	Typ 1,0 l	Typ 1,5 l	REST (in l)
Nr. 1	80	15	60	50	1,1
Nr. 2	0	45	100	31	1
Nr. 3	220	72	30	20	1,4
Bedarf	12.000	8.500	9.000	7.250	

Nun seien vor jeder Schablonenbefüllung 170 l der abzufüllenden Flüssigkeit in die Maschine eingebracht; nach jeder Schablonenbefüllung wird die Überschussmenge weggeschüttet. Es sei das Ziel, die gesamte Überschussmenge zu minimieren.

$$\min 1{,}1x_1 + 1x_2 + 1{,}4x_3$$
$$s.d.$$
$$80x_1 + 0x_2 + 220x_3 \geq 12000$$
$$15x_1 + 45x_2 + 72x_3 \geq 8500$$
$$60x_1 + 100x_2 + 30x_3 \geq 9000$$
$$50x_1 + 31x_2 + 20x_3 \geq 7250$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ und ganzzahlig}$$

Gliederung

1. Weiche Planung
   1.1. Theorie unscharfer Mengen
   1.2. Unscharfe lineare Optimierungsprobleme

2. Betriebswirtschaftliche Standardprobleme
   2.1. Übersicht der Probleme
   2.2. Exakte und heuristische Verfahren

3. Vom Realproblem zum Modell – Beispiele –
   3.1. Netzplantechnik
   3.2. Ganzzahlige Lineare Optimierungsprobleme
   3.3. Lineare Optimierungsprobleme

3. Vom Realproblem zum Modell

Lineare Optimierungsprobleme (I)

Ein Mineralölunternehmen kann in einer Planungsperiode bis zu 9.000 ME eines Kraftstoffs zu 190 € je ME absetzen. Der Kraftstoff muss jedoch eine Mindestoktanzahl von 90 aufweisen. Zu seiner Herstellung stehen drei Kraftstoffe zur Verfügung, die entsprechend gemischt werden können. Sie haben unterschiedliche Beschaffungspreise und verschiedene Oktanzahlen. Ferner sind zwei von ihnen nur in der Menge von 4.000 ME verfügbar.

Gefragt ist nach den Mengen, die von den einzelnen Grundstoffen in die Mischung eingehen und nach der Mischungsmenge, die abgesetzt werden soll, damit ein maximaler Gewinn realisiert werden kann. Die folgende Tabelle fasst die Daten zusammen:

	Preis €/ME	Oktanzahl	Maximalmenge
Mischung	190	90	9.000
Grundstoff 1	180	87,5	4.000
Grundstoff 2	210	100	4.000
Grundstoff 3	140	75	∞

3. Vom Realproblem zum Modell

Lineare Optimierungsprobleme (II)

	Preis €/ME	Oktanzahl	Maximalmenge
Mischung	190	90	9.000
Grundstoff 1	180	87,5	4.000
Grundstoff 2	210	100	4.000
Grundstoff 3	140	75	∞

$$\max G = 190(x_1 + x_2 + x_3) - 180x_1 - 210x_2 - 140x_3$$

$$s.d.$$

$$87{,}5x_1 + 100x_2 + 75x_3 \geq 90(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\Leftrightarrow 87{,}5x_1 - 90x_1 + 100x_2 - 90x_2 + 75x_3 - 90x_3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2{,}5x_1 + 10x_2 - 15x_3 \geq 0$$

$$x_1 \leq 4000$$

$$x_2 \leq 4000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3. Vom Realproblem zum Modell

Lineare Optimierungsprobleme (III)

Ein Betrieb fertigt aus den Rohstoffen R1, R2, R3 und R4 30 Tonnen eines Produktes P1 und 60 Tonnen eines Produktes P2 in einer Planungsperiode. Die Absatzlage bei Produkt P2 und eine Umsatzrentabilität von 0,7% führen zu folgender Analyse der Unternehmenssituation:

Zur Erstellung einer Tonne von P1 sind je 0,5 t von den Rohstoffen R1, R2 und R3 erforderlich. Eine Tonne von P2 lässt sich aus 0,8 t R1, 0,5 t R3 und 1/3 t R4 gewinnen.

Zur Produktion einer Tonne von P1 werden die Teilbetriebe A und B je zwei Stunden belegt. Bei der Erstellung von einer Einheit von P2 werden die Teilbetriebe A,B und C jeweils vier, zwei bzw. sechs Stunden belastet.

Die Kapazität der Teilbetriebe beträgt pro Planungsperiode

A	340 Std.
B	300 Std.
C	360 Std.

Die Fixkosten des Gesamtbetriebes belaufen sich auf 38.000 € pro Planungsperiode.

Der Einkauf und die Produktion teilen mit, dass die Beschaffungs- und die Weiterverarbeitungskosten

für R1	1.000 €/t
für R2	800 €/t
für R3	400 €/t
für R4	750 €/t

betragen.

Von der Verkaufsabteilung erhält der Planer die Information, dass Produkt P1 einen Erlös von 1.400 €/t und Produkt P2 einen Erlös von 1.750 €/t erbringt. Ferner erlaubt der Markt höchstens einen Absatz von 100 t von P1 und 50 t von P2 pro Periode.

Es ist ein mathematisches Modell zu formulieren, welches den Gewinn maximiert

3. Vom Realproblem zum Modell

Lineare Optimierungsprobleme (IV)

Zunächst werden die Informationen tabellarisch zusammen gefasst.

	Produkt P1	Produkt P2
Erlös	1.400	1.750
Rohstoff R_1	0,5·1.000=500	0,8·1000=800
Rohstoff R_2	0,5·800=400	0
Rohstoff R_3	0,5·400=200	0,5·400=200
Rohstoff R_4	0	1/3·750=250
Stückdeckungs-beitrag	300	500

LOP

$$\max G = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2 - 38000$$

$$s.d.$$

$$x_1 \leq 100$$

$$x_2 \leq 50$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 340$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 300$$

$$6x_2 \leq 360 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

Lineare Optimierungsprobleme (V)

Der Hochofenprozess ist bei den Duisburgern Stahlwerken Grundlage der Stahlerzeugung. Der Bereich „Roheisen“ betreibt zwei Hochöfen mit einer Produktionskapazität von je 2,5 Mio. t Roheisen pro Jahr. Diese Mengen sollen auch produziert werden.

Die Versorgung der Hochöfen mit Einsatzstoffen erfolgt über die in den Bereich integrierten Vorstufen Kokerei und Möllervorbereitung, in denen Koks und Sinter produziert werden.

Koks dient dabei lediglich zur Reduktion der Eisenerze zu Eisen. Die Stahlwerke stellen in den eigenen Kokereien 100% des Koksbedarfs selber her.

In der Sinteranlage werden Feinerze unter Beimengung von Koks und weiteren Zuschlägen erhitzt und zusammengebacken. Der entstehende Sinter ist zum direkten Einsatz im Hochofen geeignet. Hinzu kommen Erze, die nach ihrem Umschlag im Hafen und nach ihrer Absiedung direkt in die Hochöfen gelangen.

Die Stahlwerke bezieht Eisenerz von verschiedenen Lieferanten; der Eisengehalt der Erze hängt dabei stark vom Fundort ab. Insgesamt gibt es vier Anbieter aus Deutschland, Australien, Spanien und Marokko mit folgenden Daten:

	Eisengehalt in %	Preis pro 100 kg in €	Maximal verfügbare Mengen (in Mio. t)
Deutschland	48	60	2
Australien	55	50	8
Spanien	60	100	5
Marokko	70	130	6

3. Vom Realproblem zum Modell

Lineare Optimierungsprobleme (VI)

Es können maximal 10 Mio. t Erz insgesamt pro Jahr im Hafen entladen werden. Für die Sinteranlage wird ausschließlich Erz aus Australien verwendet; es macht einen Anteil zwischen 40% und 60% der gesamten Erzmenge aus.
Stellen Sie ein mathematisches Modell auf, welches die Zuliefermengen plant und die Kostenminimierung zum Ziel hat.

$$\min K = 60x_1 + 50x_2 + 100x_3 + 130x_4$$

$$x_1 \le 20000000$$
$$x_2 \le 80000000$$
$$x_3 \le 50000000$$
$$x_4 \le 60000000$$

$$x_2 \ge 0{,}4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \Leftrightarrow 0{,}6x_2 - 0{,}4x_1 - 0{,}4x_3 - 0{,}4x_4 \ge 0$$
$$x_2 \le 0{,}6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \Leftrightarrow 0{,}4x_2 - 0{,}6x_1 - 0{,}6x_3 - 0{,}6x_4 \le 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 100000000$$

$$0{,}48x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}6x_3 + 0{,}7x_4 = 50000000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Gliederung