FernUniversität in Hagen

Lehrstuhl für
Betriebswirtschaftslehre,
insb. Operations Research
Prof. Dr. Wilhelm Rödder

Allgemeine Betriebswirtschaftslehre
Planungs- und Entscheidungstechniken

Sandra Rudolph, Dr. Friedhelm Kulmann*

Überblick

Motivation

6. Heuristiken

6.1 Merkmale von Heuristiken

6.2 Entscheidungsunterstützung mittels Heuristiken

6.2.1 Transport- und Qualitätsplanung (mit Ergänzungen vom 10.02.2006)

6.2.2 Das Rundreiseproblem

Ausblick

Gibt es Probleme, die zwar mathematisch exakt fassbar, jedoch nicht in akzeptabler Zeit lösbar sind?

6.1 Merkmale von Heuristiken

keine Garantie für die Optimalität einer gefundenen Lösung
allerdings oft geeignete Methode, um Lösungen zu generieren

Man unterscheidet:
Eröffnungsverfahren
zur Bestimmung einer ersten zulässigen Lösung

Verbesserungsverfahren
zur Verbesserung einer vorhandenen zulässigen Lösung

Abgrenzung zu:
Unvollständig exakte Verfahren
die vor Ermittlung einer optimalen Lösung abgebrochen werden

Vogel-Approximation und Minimum-Regret

Heuristik zur Berechnung eines guten Transportplans ist die so genannte Vogel'sche Approximationsmethode.
Grundidee dieser Methode ist es,

- **zunächst Transportmengen mit geringen Einheitskosten zu bewegen,**
- **zusätzlich jedoch darauf zu achten, dass alternative Transporte vom gleichen Anbieter oder zum gleichen Nachfrager erheblich teurer wären.**

Algorithmus „Vogel-Approximation“

Schritt 1: Initialisierung

- **Alle $x_{ij} := u$, alle Zeilen und Spalten unmarkiert.**

Schritt 2: Auswahl

- **Für jede unmarkierte Zeile i berechne die Differenz d_i des zweitkleinsten abzüglich des kleinsten Zeilenelements noch nicht markierter Spalten.**
- **Für jede unmarkierte Spalte j berechne die Differenz d_j des zweitkleinsten abzüglich des kleinsten Spaltenelements noch nicht markierter Zeilen**
- **Wähle die Zeile bzw. Spalte (Reihe) mit der maximalen aller Differenzen. c_{pq} sei das minimale Element in dieser Reihe.**

Schritt 3: Transport

$x_{pq} := \min (a_p, b_q)$

$a_p := a_p - x_{pq}$, $b_q := b_q - x_{pq}$

Schritt 4: Markierung

Falls $a_p = 0$, markiere Zeile p und gehe zu Schritt 2.

Falls $b_q = 0$ und $a_p \neq 0$, markiere Spalte q und gehe zu Schritt 2.

Schritt 5: Restverteilung

- **Alle Angebote sind bis auf einen oder alle Nachfrager bis auf einen markiert. Verteile den Rest.**

Ergebnis: Alle $x_{ij} \geq 0$ bilden den Transportplan.

Beispiel „Wechselbrücken“

- **kombinierter Straße-/Schiene-Transport von großen Stückgütern, Einsatz von Wechselbrücken, wie Container mobil einsetzbar, vier Stützen herunter klappbar, Fahrzeug absenken und herausfahren, Entladung oder Umsetzung auf Waggons nun möglich.**
- **Ausgangspunkte: $S_1 = 11$, $S_2 = 30$, $S_3 = 12$.**
  Bedarfe: $B_1 = 13$, $B_2 = 10$, $B_3 = 24$, $B_4 = 6$ / Einheitstransportkosten

c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4
S_1	55	30	80	70
S_2	30	25	30	50
S_3	70	20	75	35

Beispiel „Wechselbrücken“

c_{ij} x_{ij}			$B1$	$B2$	$B3$	$B4$		
	a_i	b_j	13	10	24	6	d_i	O.
S_1	11		55	30	80	70	25	
S_2	30		30	25	30	50	5	
S_3	12		70	20	75	35	15	
		d_j	25	5	45	15		
		O.						

Beispiel „Wechselbrücken“

x_{ij}		B_1	B_2	B_3	B_4
	a_i b_j	13	10	24	6
S_1	11	7	4		
S_2	30	6		24	
S_3	12		6		6

- **Transportkosten: $7 \cdot 55 + 4 \cdot 30 + 6 \cdot 30 + 24 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 6 \cdot 35 = 1735$**

Rucksackproblem

K	**die Kapazität des Rucksacks,**
n	**die Anzahl der zur Verfügung stehenden Gegenstände,**
w_i	**der Wert des Gegenstands** i **(**$1 \leq i \leq n$**),**
x_i	**Entscheidungsvariable, ob Gegenstand** i **ausgewählt wird,**
p_i	**der Platz, den der Gegenstand** i **in Anspruch nimmt (**$1 \leq i \leq n$**).**

max $$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i$$

u.d.N. $$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \leq K$$

$$x_i \in \{0, 1\}.$$

Beispiel „Oma Elli“

- **Oma Elli Guthaben von 500,- Euro**
  3 verschiedene Aktien als Alterssicherung
  Anlageberater sucht 5 viel versprechende Aktien als Angebot aus

Aktie	Kurs	Kursprognose
1) SEIER AG	100,- Euro	+3,5%
2) MITSUTACHI AG	120,- Euro	+4,0%
3) KLEINGEIST VZ.	150,- Euro	+4,0%
4) DEMAGUSSA ST.	180,- Euro	+5,0%
5) KABOOM AG	200,- Euro	+5,5%

- **Lösungen des Rucksackproblems** $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

Beispiel „Oma Elli“

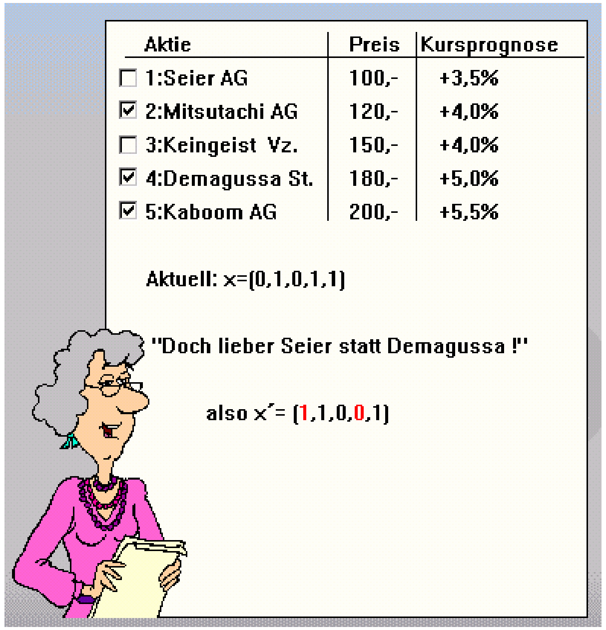
K	**Guthaben von Oma Elli,**
n	**die Anzahl der viel versprechenden Aktien,**
w_i	**Kurs · Kursprognose der Aktie i ($1 \leq i \leq 5$),**
x_i	**Auswahl der Aktie i,**
p_i	**Kurs der Aktie i ($1 \leq i \leq 5$).**

max $$\sum_{i=1}^{5} w_i \cdot x_i$$

u.d.N. $$\sum_{i=1}^{5} p_i \cdot x_i \leq 500$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$$ **Restriktion, die bewirkt, dass genau 3 Aktien ausgewählt werden.**

$x_i \in \{0, 1\}$.



Prüfplanung (10.02.2006)

KI_i **Inspektionskosten,**

KA_i **Annahmekosten,**

KR_i **Reparaturkosten,**

x_i **Entscheidungsvariable, ob Komponente *i* überprüft wird,**

p_i **Wahrscheinlichkeit für einen Defekt an Komponente *i***

prüfwürdig, wenn

$$\mathrm{KI}_i + p_i \cdot \mathrm{KR}_i < p_i \cdot \mathrm{KA}_i \Leftrightarrow \mathrm{KI}_i + p_i \cdot (\mathrm{KR}_i - \mathrm{KA}_i) < 0$$

Gesamtprüfkosten für Komponente *i*:

$$\begin{aligned} x_i \cdot (\mathrm{KI}_i + p_i \cdot \mathrm{KR}_i) + (1 - x_i) \cdot p_i \cdot \mathrm{KA}_i & \\ &= x_i \cdot \mathrm{KI}_i + x_i \cdot p_i \cdot \mathrm{KR}_i + 1 \cdot p_i \cdot \mathrm{KA}_i - x_i \cdot p_i \cdot \mathrm{KA}_i \\ &= p_i \cdot \mathrm{KA}_i + (\mathrm{KI}_i + p_i \cdot (\mathrm{KR}_i - \mathrm{KA}_i)) \cdot x_i \end{aligned}$$

t_i **Prüfdauer für Komponente *i*,**
t **insgesamt verfügbare (Takt-)Zeit.**
Problem kostenminimaler Prüfplanung bei Zeitbeschränkung

min $$\sum_i (\mathrm{KI}_i + p_i \cdot (\mathrm{KR}_i - \mathrm{KA}_i)) \cdot x_i$$

u.d.N. $$\sum_i t_i \cdot x_i \le t \;\text{ und }\; x_i \in \{0,1\}$$

Heuristik:
n **Komponenten können maximal geprüft werden;**
berechne für alle Komponenten (*i* = 1...*n*) die spezifischen Kosten sp_i

$$sp_i = (\mathrm{KI}_i + p_i \cdot (\mathrm{KR}_i - \mathrm{KA}_i)) / t_i$$

sortiere diese aufsteigend;
nehme so lange Komponenten in den Prüfplan auf,
bis Taktzeit *t* ausgeschöpft ist.

Beispiel 6.1: Prüfplanung

Für insgesamt sechs Komponenten haben Voranalysen ergeben, dass eine Inspektion und nachfolgende Reparatur kostengünstiger sind, als bei Nichtprüfung die später entstehenden Annahmekosten zu tragen.
Die jeweils möglichen Kostendifferenzen werden in die ZF übernommen:

min $-100x_1 - 120x_2 - 90x_3 - 70x_4 - 80x_5 - 110x_6$

Die Nebenbedingungen schränken die Anzahl der zu prüfenden Komponenten ein. Insgesamt stehen 180 Sekunden zur Verfügung; die für die einzelnen Komponenten erforderlichen Zeiten stehen in der NB.

u.d.N. $30x_1 + 40x_2 + 50x_3 + 25x_4 + 45x_5 + 55x_6 \leq 180 \text{ und } x_i \in \{0,1\}$

Anwendung der Heuristik zur Berechnung einer guten Lösung:
6 Komponenten können maximal geprüft werden;
berechne für alle Komponenten die spezifischen Kosten sp_i (i = 1...6)

$$sp_1 = -100/30 = -3{,}3;$$

$$sp_2 = -3{,}0;\ sp_3 = -1{,}8;\ sp_4 = -2{,}8;\ sp_5 = -1{,}78;\ sp_6 = -2{,}0$$

$$\Rightarrow sp_1 < sp_2 < sp_4 < sp_6 < sp_3 < sp_5$$

$$\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 1; x_4 = 1; x_6 = 1; x_3 = 0; x_5 = 0$$ **; ZFW: -400**

Übungsaufgabe 6.2

$$\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 1; x_4 = 0; x_6 = 1; x_3 = 1; x_5 = 0$$ **; ZFW: -420**

Orientierung

Prinzip „Nächster Nachbar“ – Eröffnungsverfahren

Schritt 1: Initialisierung

- **Wähle Startort $v_0 \in V$,**
  $M := V \setminus \{v_0\}$ sei die Menge der Orte, die noch nicht in der Tour enthalten sind, und c (zu Beginn = 0) die Länge der Tour.

Schritt 2: Iteration

- **Ermittle nächsten, noch nicht besuchten Nachbarn v' zum letzten ausgewählten Orte.**
- **Verlängere die Tour um den Ort v',**
  $M := M \setminus \{v'\}$, entferne v' aus der Menge der noch nicht besuchten Orte,
  Aktualisiere c, die Länge der Tour,
  Falls $M \neq \emptyset$, wiederhole die Iteration, sonst kehre zu v_0 zurück.

Beispiel „Besuch in Hamburg“

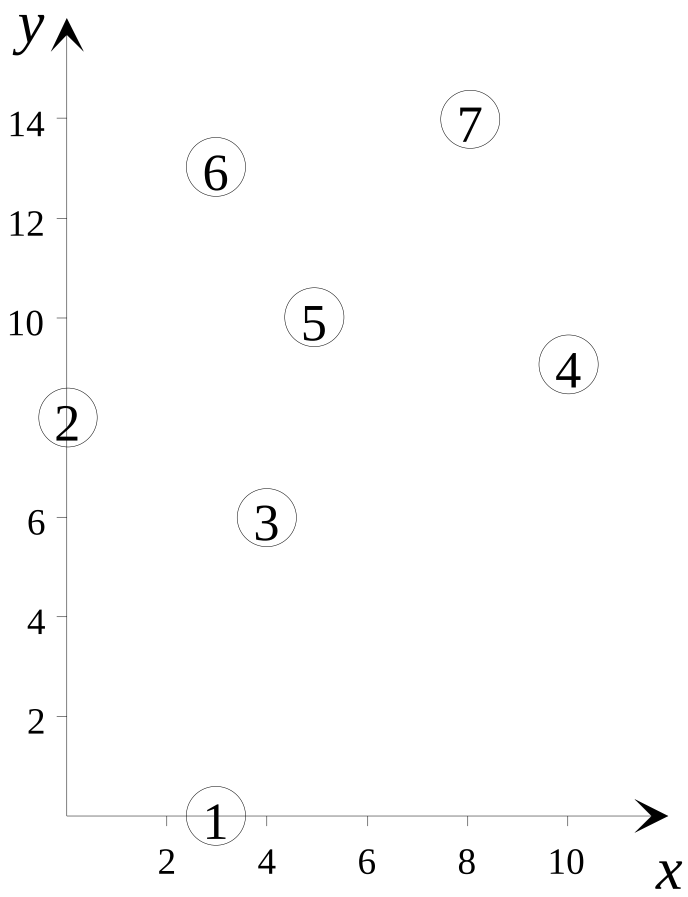
- **Hamburger Hauptbahnhof(H) (Ankunft und Abfahrt)**
- **Kaffee Bobby Reich (R) (Kaffee trinken)**
- **Ohlsdorfer Friedhof (O) (Grab des Großvaters besuchen)**
- **Großer Michel (M) (Besichtigung)**
- **Universität (U) (möglicher Studienplatz)**
- **Blankenese (B) (Wohnort von Oma Tatterich)**
- **Ankunft aus Straubing: 11:07 Uhr**
- **Abfahrt Richtung Flensburg: 14:42 Uhr**

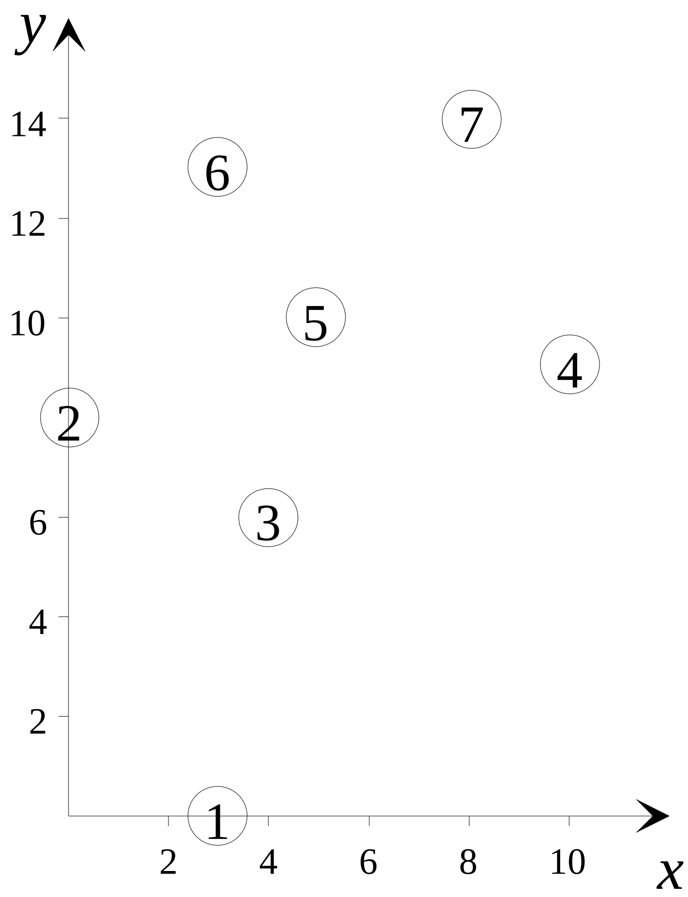
Beispiel „Besuch in Hamburg“

min	R	M	O	U	H	B
R	*	15	19	22	12	32
M	15	*	28	24	9	28
O	19	28	*	18	21	34
U	22	24	18	*	16	48
H	12	9	21	16	*	35
B	32	28	34	48	35	*

- **Anwendung des Prinzips „Nächster Nachbar“ führt zu folgender Rundreise: H → M → R → O → U → B → H, 144 Minuten**

Prinzip „2-opt“ – Verbesserungsverfahren





Verfahren „2-opt“

Schritt 1: Initialisierung

- **Wähle eine Anfangstour $<o_1, o_2,\dots, o_n>$ mit der Kantenmenge $T=\{(o_1,o_2),(o_2,o_3),\dots,(o_{n-1},o_n)\}$. Gegeben seien Entfernungen $d(o_i,o_j)$ für alle $i, j\in\{1,\dots,n\}$.**

Schritt 2: Austausch

- **Für alle Kantenpaare $[(o_p,o_{p+1}),(o_q,o_{q+1})]$, die keinen Knoten gemeinsam haben führe aus: Ist $d(o_p,o_{p+1})+d(o_q,o_{q+1}) > d(o_p,o_q) + d(o_{p+1},o_{q+1})$ setze $T:=T \setminus \{(o_p,o_{p+1}), (o_q,o_{q+1})\} \cup \{(o_p,o_q), (o_{p+1},o_{q+1})\}$ und beginne erneut mit Schritt 2.**

Abbruchkriterium

- **Alle Kantenpaare wurden ohne Austausch überprüft.**

Ergebnis

- **T enthält die 2-optimale Tour !**

Fortsetzung des Beispiels „Besuch in Hamburg“

- **Anfangstour <H M R O U B H> := <$o_1,o_2,o_3,o_4,o_5,o_6,o_7=o_1$> mit einer Länge von 144 Minuten.**

p	q	$d(o_p,o_{p+1})$	$d(o_q,o_{q+1})$	Σ	>?	$d(o_p,o_q)$	$d(o_{p+1},o_{q+1})$	Σ
1	3	9	19	28		12	28	40
1	4	9	18	27		21	18	39
1	5	9	48	57		16	28	44

- **<H U O R M B H>; Tour ist um 13 Minuten verkürzt.**