FernUniversität in Hagen

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

AUFGABENTEIL

Modul-Abschlussklausur zum

B-Modul Nr. 31531, Theorie der Leistungserstellung

Termin: 22. September 2011, 9:00 bis 11:00 Uhr

Prüfer: Prof. Dr. Dr. h. c. Günter Fandel

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Σ**
maximale Punktzahl	18	37	27	12	26	120

Diesen Aufgabenteil können Sie abtrennen und mitnehmen!

HINWEISE ZUR BEARBEITUNG

- Die Klausur besteht aus einem Aufgabenteil und einem Lösungsteil. Überprüfen Sie zunächst, ob Sie die korrekte **Anzahl an Seiten (insgesamt 21 Seiten)** erhalten haben. Melden Sie sich unverzüglich bei einer der aufsichtsführenden Personen, falls das nicht der Fall sein sollte.
- Füllen Sie nun den Kopf des Deckblattes und der nachfolgenden Seiten aus!
- Die Klausur umfasst **fünf Aufgaben**. Die gesamte **Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten**. Bei jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben. Insgesamt können maximal 120 Punkte erreicht werden.
- Die Lösungen müssen in die dafür **vorgesehenen Lösungsbögen** eingetragen werden. Bei Platzproblemen verwenden Sie bitte die Rückseiten und verweisen auf diese. Eigene mitgebrachte Blätter dürfen nicht verwendet werden!
- **Schreiben Sie bitte weder mit Bleistift** (Ausnahme: Zeichnungen) **noch mit Rotstift!**
- Bitte schreiben Sie leserlich! Unlesbarkeiten gehen zu Ihren Lasten.
- Sie können den Aufgabenteil abtrennen, aber trennen Sie bitte keine einzelnen Seiten aus dem Lösungsteil ab!
- Als **Hilfsmittel** sind – neben Schreib- und Zeichengeräten – ausschließlich Taschenrechner zugelassen, die
  - nicht programmierbar sind,
  - keine Texte oder Formeln speichern können,
  - nicht drahtlos mit anderen Geräten kommunizieren können,
  - über keine alphanumerische Tastatur verfügen und
  - kein graphisches Display (z. B. zur Darstellung von Funktionsgraphen) besitzen.
- **Unterschreiben** Sie vor der Abgabe Ihre Klausur auf der letzten von Ihnen beschriebenen Seite!
- **Teilen Sie sich Ihre Zeit ein!** Als Anhaltspunkt für die Bearbeitungszeit der Aufgaben gilt: Ein Punkt entspricht etwa einer Minute.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Grundlagen 18 Punkte

Ein Unternehmen produziert genau einen Output durch Einsatz von zwei Produktionsfaktoren i = 1, 2. Die Produktionsfunktion lautet

$$x = r_1^{1/2} \cdot r_2^{1/2}.$$

Es bezeichne x die hergestellten Outputmengeneinheiten und r_i die zur Produktion verwendeten Faktormengen.

a) Überprüfen Sie, ob diese Produktionsfunktion Isoklinen (d. h. s_{12} = const.) besitzt, die Ursprungsgeraden sind. Weisen Sie die dafür notwendige Eigenschaft der Produktionsfunktion formal nach. **3 Punkte**

b) Leiten Sie die Isoklinengleichung für $s_{12} = 2$ ab. **5 Punkte**

c) Berechnen Sie die Komplementaritätsgrade k_{12} und k_{21} der Produktionsfunktion in den Produktionspunkten **10 Punkte**

$(r_1; r_2) = (1; 2)$,

$(r_1; r_2) = (2; 1)$ und

$(r_1; r_2) = (2; 2)$.

Aufgabe 2: Substitutionale Produktionsmodelle 37 Punkte

a) Neoklassischen Produktionsfunktionen werden – abgesehen von der Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren – zwei Eigenschaften zugerechnet, die sie von klassischen Produktionsfunktionen abgrenzen. Geben Sie diese beiden Eigenschaften verbal oder formal wieder. **6 Punkte**

b) Die CES-Produktionsfunktion geht auf die Arbeiten von Arrow, Chenery, Minhas und Solow zurück und ist eine solche neoklassische Produktionsfunktion. Allgemein lässt sie sich wie folgt darstellen: **4 Punkte**

$$x = \left(c_1 \cdot r_1^{-\rho} + \ldots + c_m \cdot r_m^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot r_i^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$$

mit $c_i > 0$, $\rho > -1$ und $\rho \neq 0$.

Erläutern Sie kurz die einzelnen Symbole der Produktionsfunktion.

c) Im Folgenden sei angenommen, dass mit nur zwei Faktoren ($i = 1, 2$) produziert wird. Die CES-Produktionsfunktion vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$x = \left(c_1 \cdot r_1^{-\rho} + c_2 \cdot r_2^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Der Name der Produktionsfunktion leitet sich daraus ab, dass die Substitutionselastizität zwischen zwei Faktoren für ein gegebenes ρ stets gleich groß und konstant ist (<u>c</u>onstant <u>e</u>lasticity of <u>s</u>ubstitution).

i. Erläutern Sie verbal, was die Substitutionselastizität allgemein aussagt. **5 Punkte**

ii. Berechnen Sie die Substitutionselastizität σ_{12} für den Zwei-Faktoren-Fall, um die behauptete Konstanz-Eigenschaft nachzuweisen. **22 Punkte**

Aufgabe 3: Leontief-Produktionsmodelle 27 Punkte

Ein Unternehmen kann zur Herstellung eines Produktes auf zwei linear-limitationale Produktionsprozesse $\pi = I, II$ zurückgreifen. Die Produktionskoeffizienten a_i^π der beiden Produktionsfaktoren $i = 1, 2$ lauten wie folgt:

Prozess I $a_1^I = 20$ $a_2^I = 6$,

Prozess II $a_1^{II} = 8$ $a_2^{II} = 14$.

Bei den angegebenen Prozessen handelt es sich um alternative Produktionsverfahren. Das Unternehmen kann also nur die reinen Prozesse, nicht aber eine Kombination der beiden zur Produktion einsetzen. Alle Gütermengen seien beliebig teilbar und die Preise der Produktionsfaktoren seien mit $q_1 = 3$ Geldeinheiten (GE) und $q_2 = 5$ GE gegeben.

a) Bestimmen Sie für jeden Prozess die Faktoreinsatzfunktionen r_i^π und zeichnen Sie die zugehörigen Prozessstrahlen sowie die Isoquanten für die Produktionsmenge $\bar{x} = 1$ in das Koordinatensystem **auf Seite 14**. **6 Punkte**

b) Ermitteln Sie das kostenminimale Produktionsverfahren für jede mögliche Produktionsmenge im Intervall $(0; \infty)$. Geben Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ an. **6 Punkte**

Nach Anschaffung einer neuen Maschine steht dem Unternehmen nun zusätzlich ein dritter alternativer Prozess zur Verfügung:

Prozess III $a_1^{III} = 14$ $a_2^{III} = \varepsilon$.

Die Variable ε beschreibt die nicht zu beeinflussende Schwankung des Verbrauchs des zweiten Produktionsfaktors im Intervall $[8; 11]$. Der Produktionskoeffizient ist jedoch kurz vor Produktionsstart hinreichend genau zu prognostizieren.

c) Zeichnen Sie den durch die Prozessstrahlen für $\varepsilon = 8$ und $\varepsilon = 11$ aufgespannten Kegel und die jeweiligen Isoquanten für die Produktionsmenge $\bar{x} = 1$ in das Koordinatensystem **auf Seite 14**. Prüfen Sie formal die Effizienz des neuen Produktionsverfahrens III. **6 Punkte**

d) Ermitteln Sie unter Berücksichtigung aller drei Prozesse das kostenminimale Produktionsverfahren für jede mögliche Produktionsmenge im Intervall $(0; \infty)$. Geben Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x, \varepsilon)$ an. **9 Punkte**

Aufgabe 4: Gutenberg-Produktionsmodelle 12 Punkte

Die Produktionsfunktion nach Gutenberg ist eine limitationale Produktionsfunktion mit indirektem Input-Output-Bezug.

a) Erläutern Sie, worin dieser indirekte Input-Output-Bezug besteht. **3 Punkte**

b) Was versteht Gutenberg unter dem Begriff „z-Situation"? **3 Punkte**

Für ein Aggregat wurde die auf Seite 17 abgebildete Zeitkostenleistungs- bzw. Gesamtkostenfunktion ermittelt. Die Gesamtdauer der Produktion beträgt $T = 1$ Zeiteinheit (ZE). Dadurch haben die Zeitkostenleistungsfunktion $z\ (\lambda)$ und die Gesamtkostenfunktion $K\ (\lambda)$ den gleichen Verlauf. Um die Produktionsmenge x_1 herzustellen, ist die Intensität λ_1 notwendig; es entstehen Gesamtkosten von K_1. Allerdings muss die Maschine nicht durchgehend mit einer Intensität betrieben werden.

c) Die Möglichkeit, während der gesamten Produktionsdauer erst mit einer und dann mit einer anderen Intensität zu produzieren, kann kostengünstiger sein. Zeigen Sie grafisch, mit welchen beiden Intensitäten man diese Möglichkeit optimal ausnutzen kann. Zeichnen Sie auch die damit verbundenen Gesamtkosten ein und heben Sie farblich die Kostenersparnis gegenüber $K_1\ (\lambda_1)$ hervor. Nutzen Sie dazu das **auf Seite 17** vorbereitete Koordinatensystem. **5 Punkte**

Hinweis: Zeichnen Sie nicht mit Rotstift!

d) Wie bezeichnet man das im vorherigen Aufgabenteil dargestellte Vorgehen? **1 Punkt**

Aufgabe 5: Erweiterungen 26 Punkte

Ein Unternehmen produziert genau einen Output durch Einsatz von zwei Produktionsfaktoren. Dafür stehen dafür zwei kombinierbare Prozesse mit den folgenden Inputfunktionen zur Verfügung:

Prozess I $r_1^I = 3\,x^I$ $r_2^I = 6\,x^I$,

Prozess II $r_1^{II} = 4\,x^{II}$ $r_2^{II} = 2\,x^{II}$.

Es bezeichne x^π die mit Prozess $\pi = I, II$ hergestellten Outputmengeneinheiten und r_1^π bzw. r_2^π die jeweils zur Produktion verwendeten Faktormengen. Die Preise der Produktionsfaktoren betragen $q_1 = 10$ Geldeinheiten (GE) für Faktor 1 und $q_2 = 2$ GE für Faktor 2. Durch den produktiven Einsatz des Faktors 2 entsteht zudem CO_2 gemäß der folgenden Verursachungsfunktion:

$$x_2^U = \sqrt{3\,r_2}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Kostenfunktionen $K^\pi(x)$ und die Schadstofffunktionen $S^\pi(x)$ der beiden Prozesse. Wie wird das Unternehmen – unter den üblichen Annahmen – Ausbringungsmengen x im Intervall $(0; \infty)$ produzieren? **10 Punkte**

b) Das Unternehmen muss einen Grenzwert für die CO_2-Emissionen beachten. Es dürfen maximal $\bar{x}_2^U = 12$ Einheiten CO_2 in der Produktion entstehen. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion $K^M(x)$ und die Gesamtschadstofffunktion $S^M(x)$ unter Beachtung des Grenzwertes. **16 Punkte**

FernUniversität in Hagen

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

NAME: ______________________________

VORNAME: ______________________________

MATRIKELNUMMER: ______________________________

LÖSUNGSTEIL

Modul-Abschlussklausur zum

B-Modul Nr. 31531, Theorie der Leistungserstellung

Termin: 22. September 2011, 9:00 – 11:00 Uhr

Prüfer: Prof. Dr. Dr. h. c. Günter Fandel

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
maximale Punktzahl	18	37	27	12	26	120
erreichte Punktzahl						

Note:

____________________ ____________________

Datum **Unterschrift des Prüfers**

Lösungsbereich zu Aufgabe 1

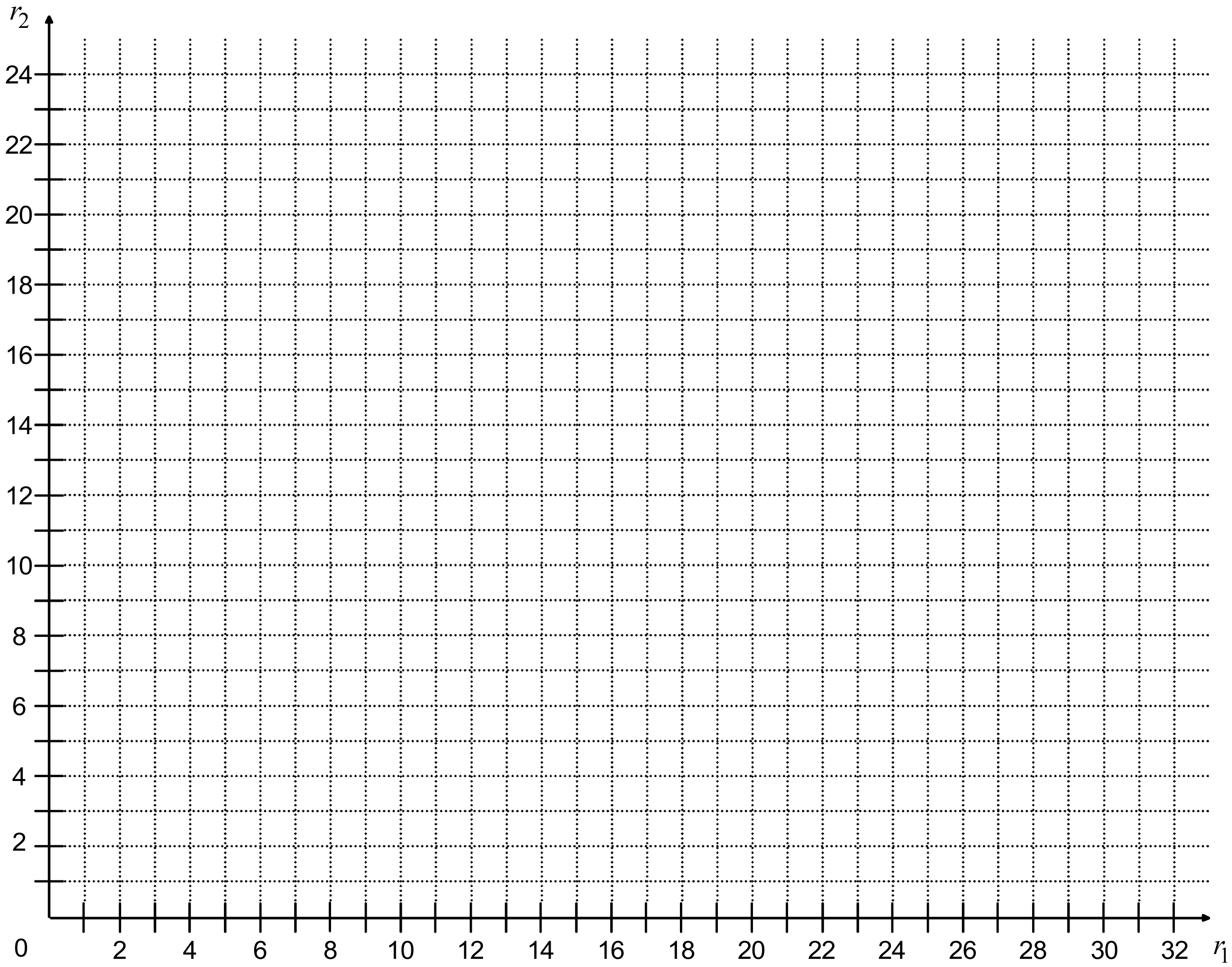
Lösungsbereich zu Aufgabe 1

Lösungsbereich zu Aufgabe 2

Lösungsbereich zu Aufgabe 2

Lösungsbereich zu Aufgabe 2

Koordinatensystem zu Aufgabe 3

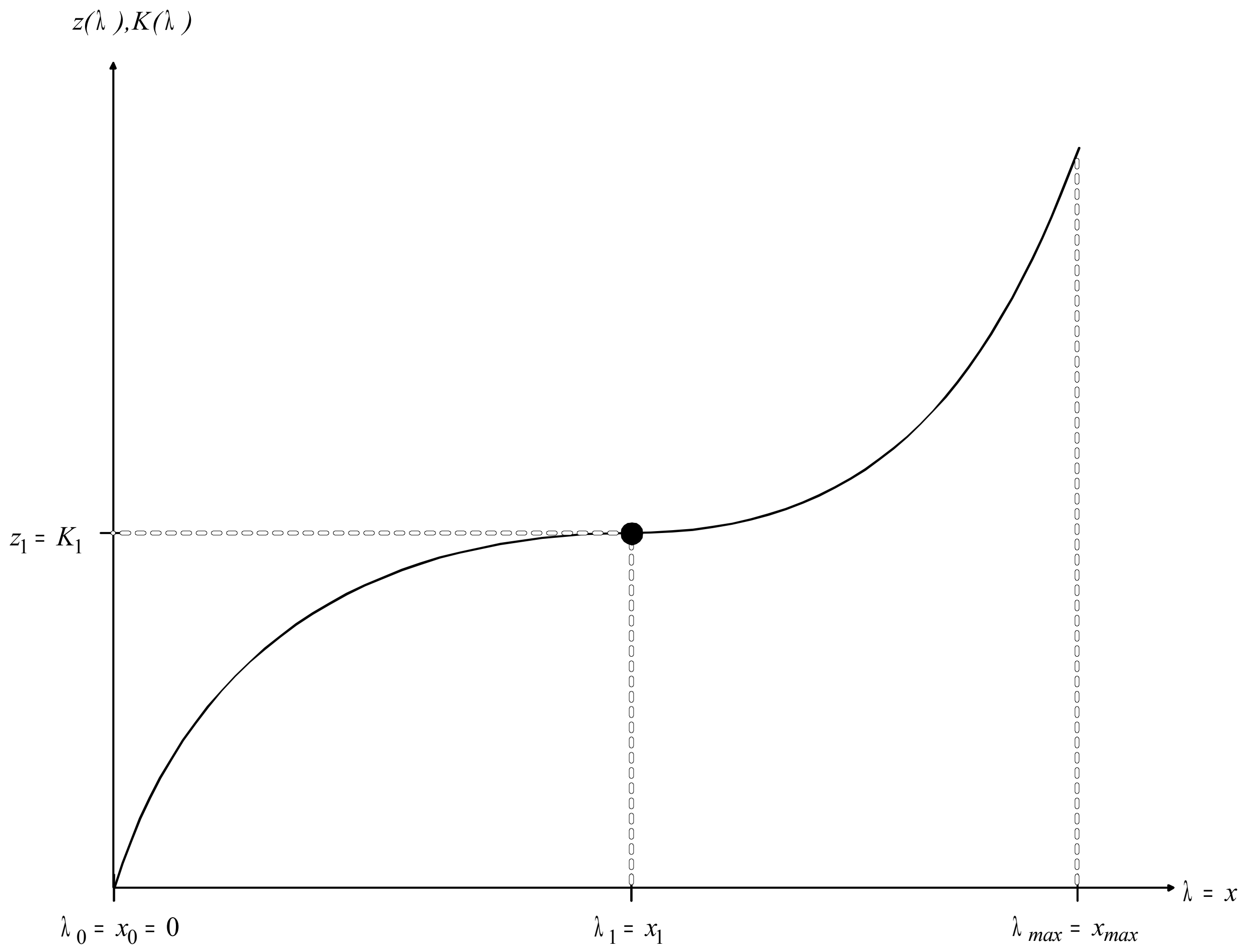


Lösungsbereich zu Aufgabe 3

Lösungsbereich zu Aufgabe 3

Lösungsbereich zu Aufgabe 3

Koordinatensystem zu Aufgabe 4



Lösungsbereich zu Aufgabe 4

Lösungsbereich zu Aufgabe 4

Lösungsbereich zu Aufgabe 5

Lösungsbereich zu Aufgabe 5

Lösungsbereich zu Aufgabe 5