Lösungshinweise zur Einsendearbeit 1: WS 2019/2020

„Finanz- und bankwirtschaftliche Modelle“, Kurs 42000

Inhaltlicher Bezug: KE 1

Aufgabe 1: Optionspreise im Binomialmodell **50 Punkte**

Sie lesen in einem Aufsatz über die Optionspreistheorie folgenden Text:

> „Bei der Bewertung im Binomialmodell wird von einem risikoneutralen Marktteilnehmer ausgegangen. Der ermittelte Optionswert gilt somit nicht für risikoaverse Marktteilnehmer. Risikoaverse Marktteilnehmer müssen den Optionswert noch um einen Sicherheitsabschlag reduzieren.“

a) Nehmen Sie zu dem angeführten Text kritisch Stellung! **(5 P.)**

Lösungshinweise:

Die Aussage im Text bezüglich der Bewertung durch risikoneutrale Marktteilnehmer ist falsch. Jeder Marktteilnehmer würde – unabhängig von seinen subjektiven Risikopräferenzen – die Option gleich bewerten. Alle im Binomialmodell angestellten Bewertungsüberlegungen basieren auf dem Gedanken der Arbitrage. Jeder Marktteilnehmer kann bei vom Modellwert abweichenden Optionswerten durch Marktgeschäfte ein risikofreies Portfolio herstellen, bei dem er einen risikolosen Gewinn erzielen würde. Der risikoaverse Marktteilnehmer würde im Modellrahmen des Binomialmodells deshalb den gleichen Optionswert ermitteln wie der risikoneutrale Marktteilnehmer.

b) Auf einem Markt existiert eine Option auf die ebenfalls auf diesem Markt gehandelte Aktie der ABSTURZ AG. Die Option hat eine Restlaufzeit von einer Periode. Eine Option berechtigt zum Kauf einer Aktie der ABSTURZ AG am Periodenende zum Basispreis von 300 GE. Die Ausübung kann nur zum Fälligkeitstermin erfolgen.

Der aktuelle Börsenkurs der Aktie der ABSTURZ AG beträgt in $t = 0$ $S_0 = 320$ GE. Es wird allgemein davon ausgegangen, dass der Wert der Aktie am Ende der Periode auf 384 GE gestiegen oder auf 160 gefallen sein wird.

Der Periodenzins für eine festverzinsliche Geldaufnahme und für die Geldanlage beträgt r = 10% pro Periode.

Auf dem Markt gelten die Annahmen des im Kurs vorgestellten Binomialmodells. Es kommt insbesondere zu keinen Dividendenzahlungen, keinen Kapitalerhöhungen o.ä.

i) Bestimmen Sie den inneren Wert der Option zum Zeitpunkt t = 0, für den Fall, dass eine sofortige Ausübung möglich wäre! **(2 P.)**

Lösungshinweise:

Der innere Wert beträgt 20 GE (320–300).

ii) Der Optionskurs enthält in der Regel eine Prämie. Diese wird bei „in-the-money"-Optionen häufig mit einer Versicherungsprämie verglichen. Erläutern Sie in diesem konkreten Fall, wie diese Option als Versicherungsinstrument interpretiert werden kann! **(4 P.)**

Lösungshinweise:

Die in dem Optionspreis enthaltene Prämie kann als Zahlung für ein **Versicherungszertifikat** interpretiert werden. Der Inhaber der Option kann im Fälligkeitszeitpunkt an Aktienkurssteigerungen über 300 (C_B) hinaus 1:1 teilhaben, er ist jedoch gegen ein Absinken des Kurses unter 300 abgesichert.

Die Versicherungsprämie ist tendenziell umso kleiner, je weiter C von 300 (C_B) entfernt liegt. Da hier der Kurs gem. Annahme die 300 unterschreiten kann, müsste die Versicherungsprämie in dieser Modellwelt positiv sein.

iii) Bestimmen Sie den Wert der Option (in t = 0) der ABSTURZ AG mittels Duplikation! **(12 P.)**

Bestimmen Sie dazu

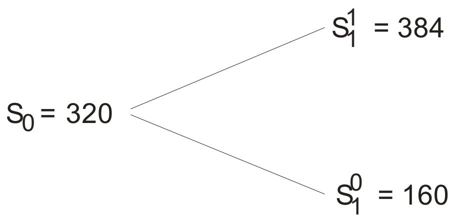
– zunächst die Anzahl der Aktien im Duplikationsportfolio,

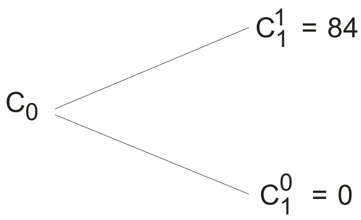
– anschließend die Höhe der festverzinslichen Aufnahme bzw. Anlage von Mitteln im Duplikationsportfolio und

– letztlich den Wert des Duplikationsportfolios und der Option!

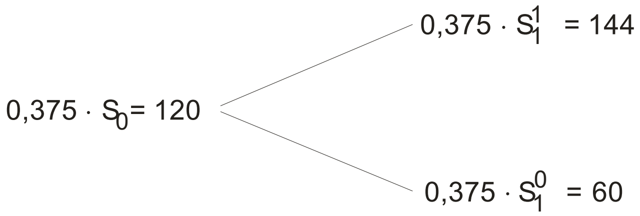
Lösungshinweise:

Die möglichen Entwicklungen des Aktienkurses und die Zahlungskonsequenzen der Option sind in den folgenden Abbildungen dargestellt:





Um die Unsicherheit der mit der Kaufoption verbundenen Zahlung nachzubilden, muss ein Kauf der Aktie erfolgen. Um die Variationsbreite der Zahlung aus der Option in Höhe von 84 GE exakt nachzubilden, muss genau $\frac{C_1^1 - C_1^0}{S_1^1 - S_1^0} = \frac{84\text{ GE}}{224\text{ GE}} = 0{,}375$ Aktie in das Duplikationsportfolio aufgenommen werden. Ein Portfolio, welches genau 0,375 Aktie enthält, führt zu den folgenden Zahlungskonsequenzen:



Diese Zahlungen übersteigen in beiden möglichen Zuständen die Zahlungen der zu duplizierenden Kaufoption um genau 60 GE. Um die Kaufoption exakt zu duplizieren, muss daher in $t = 0$ eine Mittelaufnahme in Höhe von $60\text{ GE} \cdot 1{,}1^{-1} = 54{,}55$ GE erfolgen, die in $t = 1$ zu einer Auszahlung in Höhe von 60 GE führt.

Der Wert des Duplikationsportfolios im Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Wert von 0,375 Aktie im Zeitpunkt $t = 0$ abzüglich der Höhe der aufgenommenen Mittel, also: $0{,}375 \cdot 320\text{ GE} + (-54{,}55\text{ GE}) = 65{,}45$ GE. Aufgrund der Arbitragefreiheit des Marktes muss damit der Wert der Option C_0 genau 65,45 GE betragen.

Probe: Gemäß Formel (3.08) muss gelten:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \left(\lambda \cdot C_1^1 + (1-\lambda) \cdot C_1^0\right)$$

$$\left[\text{mit } \lambda = \frac{(1+r)-d}{u-d} = \frac{1{,}1-0{,}5}{1{,}2-0{,}5} = 0{,}8571\right]$$

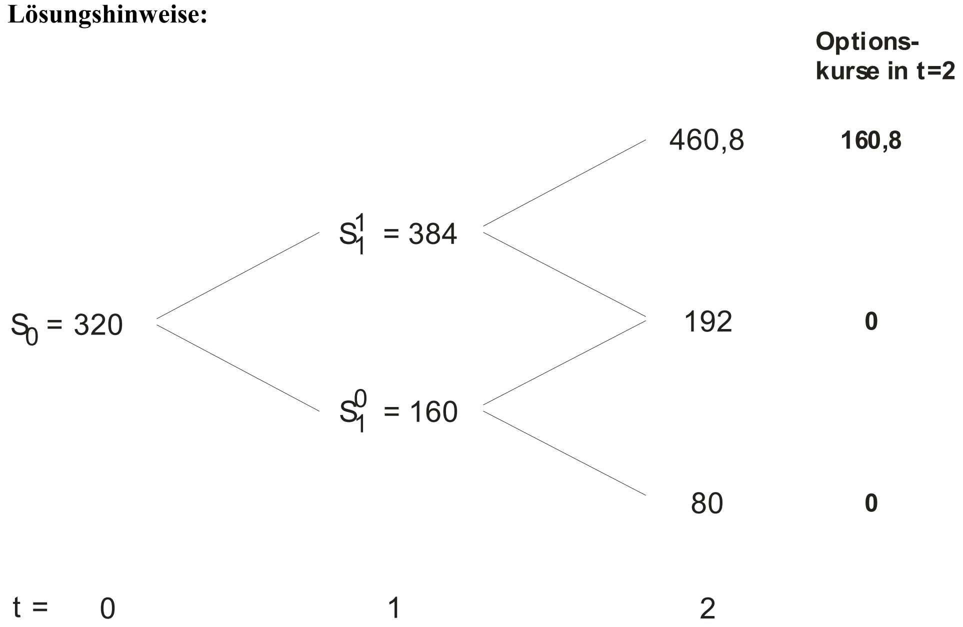
$$= \frac{1}{1{,}1} \cdot \left(0{,}8571 \cdot 84 + 0{,}1429 \cdot 0\right) = \frac{18}{1{,}1} = 65{,}45\text{ GE}.$$

c) Gehen Sie nun davon aus, dass die Laufzeit der Option nicht eine Periode, sondern zwei Perioden beträgt.

Der aktuelle Börsenkurs der Aktie der ABSTURZ AG sei wiederum $S_0 = 320$ GE. Es wird nun davon ausgegangen, dass der Wert der Aktie am Ende einer jeden Periode gegenüber dem Wert zu Beginn der Periode jeweils 20% gestiegen oder um 50% gefallen ist. Dies gilt unabhängig davon, ob der Wert der Aktie in der Periode zuvor gefallen oder gestiegen ist.

i) Stellen Sie in einem Zustandsbaum die möglichen Aktienkurse für die Zeitpunkte t = 0, t = 1 und t = 2 dar! Geben Sie auch die bedingten Kurse für die Option im Zeitpunkt t = 2 an! **(6 P.)**

Lösungshinweise:



ii) Ermitteln Sie den Wert der Option im Zeitpunkt t = 0 zum einen durch Anwendung der allgemeinen Bewertungsformel für den Zweiperioden-Fall und zum anderen durch (mehrfache) Anwendung der Bewertungsformel für den Einperioden-Fall! **(12 P.)**

Lösungshinweise:

Gemäß allgemeiner Bewertungsformel für den Zweiperioden-Fall (vgl. Formel (3.11)) gilt:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{1}{1+r}\left(\lambda \cdot C_2^2 + (1-\lambda) \cdot C_2^1\right) + (1-\lambda) \cdot \frac{1}{1+r} \cdot \left(\lambda \cdot C_2^1 + (1-\lambda) \cdot C_2^0\right)\right)$$
$$= \frac{1}{(1+r)^2} \cdot \left(\lambda^2 \cdot C_2^2 + 2 \cdot \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot C_2^1 + (1-\lambda)^2 \cdot C_2^0\right).$$

Für

$$C_2^2 = (320 \cdot 1{,}2^2) - 300 = 160{,}8 \ ,$$
$$C_2^1 = \max\{(320 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}5) - 300 \,;\, 0\} = 0 \quad \text{und}$$
$$C_2^0 = \max\{(320 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5) - 300 \,;\, 0\} = 0 \quad \text{und}$$
$$\lambda = \frac{(1+r)-d}{u-d} = \frac{1{,}1-0{,}5}{1{,}2-0{,}5} = 0{,}8571 \quad \text{gilt:}$$
$$C_0 = \frac{1}{1{,}1^2} \cdot \left(0{,}8571 \cdot 160{,}8 + 0 + 0\right) = 97{,}63 \ .$$

Ermittelt man den Wert der Option im Zeitpunkt t = 0 durch schrittweise Rückrechnung unter zweimaliger Anwendung der Bewertungsformel (3.08), so ergibt sich unter Berücksichtigung der bereits ermittelten Werte $C_2^2 = 160{,}8$ und $C_2^1 = C_2^0 = 0$ sowie $\lambda = 0{,}8571$ für die zwei möglichen Optionswerte im Zeitpunkt t = 1:

$$C_1^1 = \frac{1}{1{,}1} \cdot \left(0{,}8571 \cdot 160{,}8 + 0{,}1429 \cdot 0\right) = 125{,}29$$

und

$$C_1^0 = \frac{1}{1{,}1} \cdot \left(0{,}8571 \cdot 0 + 0{,}1429 \cdot 0\right) = 0$$

und auf Basis dieser Werte für den Optionswert im Zeitpunkt t = 0:

$$C_0 = \frac{1}{1{,}1} \cdot \left(0{,}8571 \cdot 125{,}29 + 0{,}1429 \cdot 0\right) = 97{,}63.$$

Der Wert der Option beträgt also 97,63 GE.

iii) Geben Sie für die Zeitpunkte t = 0 und t =1 die Zusammensetzung der jeweilig relevanten Duplikationsportfolios an! **(9 P.)**

Lösungshinweise:

Im Zeitpunkt t = 0 ergibt sich die Anzahl der im Duplikationsportfolio enthaltenen Aktien aus:

$$\Delta_0 = \frac{C_1^1 - C_1^0}{(u-d) \cdot S_0} = \frac{125{,}29-0}{(1{,}2-0{,}5) \cdot 320} = 0{,}5593$$

und die Höhe der Mittelaufnahme aus:

$$B_0 = \frac{1}{1{,}1} \cdot \frac{1{,}2 \cdot 0 - 0{,}5 \cdot 125{,}29}{1{,}2-0{,}5} = -81{,}36 \text{ GE} .$$

Das Duplikationsportfolio besteht daher aus 0,5593 Aktien und einer Mittelaufnahme in Höhe von 81,36 GE.

Im Zeitpunkt t = 1 unterscheidet sich die Zusammensetzung je nachdem, ob sich der Aktienkurs um den Faktor u oder d verändert hat.[1)]

1. Fall: Der Aktienkurs hat sich um den Faktor u verändert:

Dann ergibt sich

$$\Delta_1^1 = \frac{160{,}80-0}{(1{,}2-0{,}5) \cdot 1{,}2 \cdot 320} = 0{,}5982$$

und die Höhe der Mittelaufnahme aus:

$$B_1^1 = \frac{1}{1{,}1} \cdot \frac{1{,}2 \cdot 0 - 0{,}5 \cdot 160{,}80}{1{,}2-0{,}5} = -104{,}42 \text{ GE} .$$

Das Duplikationsportfolio enthält in diesem Fall 0,5982 Aktien und eine Geldaufnahme in Höhe von 104,42 GE.

2. Fall: Der Aktienkurs hat sich um den Faktor d verändert:

Dann ergibt sich:

$$\Delta_1^0 = 0 \text{ und}$$

$$B_1^0 = 0 .$$

Im 2. Fall weist das Duplikationsportfolio gar keinen Bestand mehr auf.

1 Index 1 (tiefgestellt) = Zeitpunkt; Index (hochgestellt) 1 = up; Index (hochgestellt) 0 = down.