
Lösungshinweise zur Einsendearbeit 1: WS 2020/2021

„Finanz- und bankwirtschaftliche Modelle“, Kurs 42000

Inhaltlicher Bezug: KE 1

Aufgabe 1: Binomialmodell

30 Punkte

- a) Auf einem Markt existiert eine Option auf die ebenfalls auf diesem Markt gehandelte Aktie der ABSTURZ AG. Die Option hat eine Restlaufzeit von einer Periode. Eine Option berechtigt zum Kauf einer Aktie der ABSTURZ AG am Periodenende zum Basispreis von 300 GE. Die Ausübung kann nur zum Fälligkeitstermin erfolgen. (8 P.)

Der aktuelle Börsenkurs der Aktie der ABSTURZ AG beträgt in $t=0$ $S_0 = 320$ GE. Es wird allgemein davon ausgegangen, dass der Wert der Aktie am Ende der Periode auf 384 GE gestiegen oder auf 160 GE gefallen sein wird.

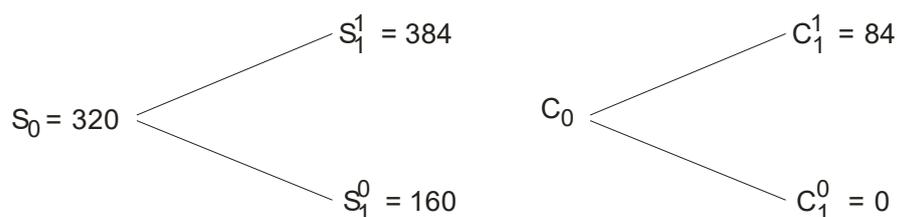
Der Periodenzins für eine festverzinsliche Geldaufnahme und für die Geldanlage beträgt $r = 10\%$ pro Periode.

Auf dem Markt gelten die Annahmen des im Kurs vorgestellten Binomialmodells.

Bestimmen Sie den Wert der Option (in $t=0$) der ABSTURZ AG mittels Duplikation! Bestimmen Sie dazu zunächst die Anzahl der Aktien im Duplikationsportfolio, anschließend die Höhe der festverzinslichen Aufnahme bzw. Anlage von Mitteln im Duplikationsportfolio und zuletzt den Wert des Duplikationsportfolios und der Option!

Lösung:

Die möglichen Entwicklungen des Aktienkurses und die Zahlungskonsequenzen der Option sind in den folgenden Abbildungen dargestellt:



Um die Unsicherheit der mit der Kaufoption verbundenen Zahlung nachzubilden, muss ein Kauf der Aktie erfolgen. Um die Variationsbreite der Zahlung aus der Option in Höhe von 84 GE exakt nachzubilden, muss genau

$$\frac{C_1^1 - C_1^0}{S_1^1 - S_1^0} = \frac{84 \text{ GE}}{224 \text{ GE}} = 0,375 \text{ Aktie in das}$$

Duplikationsportfolio aufgenommen werden. Ein Portfolio, welches genau 0,375 Aktie enthält, führt zu den folgenden Zahlungskonsequenzen:

$$0,375 \cdot S_0 = 120 \begin{cases} 0,375 \cdot S_1^1 = 144 \\ 0,375 \cdot S_1^0 = 60 \end{cases}$$

Diese Zahlungen übersteigen in beiden möglichen Zuständen die Zahlungen der zu duplizierenden Kaufoption um genau 60 GE. Um die Kaufoption exakt zu duplizieren, muss daher in $t = 0$ eine Mittelaufnahme in Höhe von $60 \text{ GE} \cdot 1,1^{-1} = 54,55 \text{ GE}$ erfolgen, die in $t = 1$ zu einer Auszahlung in Höhe von 60 GE führt.

Der Wert des Duplikationsportfolios im Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Wert von 0,375 Aktie im Zeitpunkt $t = 0$ abzüglich der Höhe der aufgenommenen Mittel, also: $0,375 \cdot 320 \text{ GE} + (-54,55 \text{ GE}) = 65,45 \text{ GE}$. Aufgrund der Arbitragefreiheit des Marktes muss damit der Wert der Option C_0 genau 65,45 GE betragen.

Probe: Gemäß Formel (3.08) muss gelten:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \cdot (\lambda \cdot C_1^1 + (1-\lambda) \cdot C_1^0)$$

$$\left[\text{mit } \lambda = \frac{(1+r)-d}{u-d} = \frac{1,1-0,5}{1,2-0,5} = 0,8571 \right]$$

$$= \frac{1}{1,1} \cdot (0,8571 \cdot 84 + 0,1429 \cdot 0) = \frac{72}{1,1} = 65,45 \text{ GE}.$$

- b) Gehen Sie nun davon aus, dass die Laufzeit der Option nicht eine Periode, sondern zwei Perioden beträgt. (8 P.)

Der aktuelle Börsenkurs der Aktie der ABSTURZ AG sei wiederum $S_0 = 320 \text{ GE}$. Es wird nun davon ausgegangen, dass der Wert der Aktie am Ende einer jeden Periode gegenüber dem Wert zu Beginn der Periode jeweils 20 % gestiegen oder um 50 % gefallen ist. Dies gilt unabhängig davon, ob der Wert der Aktie in der Periode zuvor gefallen oder gestiegen ist. Ermitteln Sie den Wert der Option im Zeitpunkt $t = 0$ durch (mehrfache) Anwendung der Bewertungsformel für den Einperioden-Fall!

Lösung:

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}C_2^2 &= (320 \cdot 1,2^2) - 300 = 160,8 \\C_2^1 &= \max\{(320 \cdot 1,2 \cdot 0,5) - 300; 0\} = 0 \\C_2^0 &= \max\{(320 \cdot 0,5 \cdot 0,5) - 300; 0\} = 0 \\ \lambda &= \frac{(1+r)-d}{u-d} = \frac{1,1-0,5}{1,2-0,5} = 0,8571 \quad .\end{aligned}$$

Ermittelt man den Wert der Option im Zeitpunkt $t = 0$ durch schrittweise Rückrechnung unter zweimaliger Anwendung der Bewertungsformel (3.08), so ergibt sich unter Berücksichtigung der bereits ermittelten Werte $C_2^2 = 160,8$ und $C_2^1 = C_2^0 = 0$ sowie $\lambda = 0,8571$ für die zwei möglichen Optionswerte im Zeitpunkt $t = 1$:

$$C_1^1 = \frac{1}{1,1} \cdot (0,8571 \cdot 160,8 + 0,1429 \cdot 0) = 125,29$$

und

$$C_1^0 = \frac{1}{1,1} \cdot (0,8571 \cdot 0 + 0,1429 \cdot 0) = 0$$

und auf Basis dieser Werte für den Optionswert im Zeitpunkt $t = 0$:

$$C_0 = \frac{1}{1,1} \cdot (0,8571 \cdot 125,29 + 0,1429 \cdot 0) = 97,62.$$

Der Wert der Option beträgt also 97,62 GE.

- c) Auf einem transaktionskostenfreien und informationseffizientem Finanzmarkt wird in $t = 0$ die X-Aktie sowie eine Kauf- und eine Verkaufsoption auf die X-Aktie gehandelt. Alle Marktteilnehmer gehen übereinstimmend davon aus, dass der Kurs der X-Aktie im nächsten Handelszeitpunkt $t = 1$ entweder 80 GE oder 40 GE betragen wird. Sie beobachten in $t = 0$, dass die Kaufoption mit einem Basispreis von 58 GE zu einem Preis von 11 GE und die Verkaufsoption mit einem Basispreis von 51 GE zu einem Preis von 4 GE gehandelt wird. Zwischen $t = 0$ und $t = 1$ können sichere Geldanlagen und Kreditaufnahmen zu $r = 10\%$ getätigt werden. (8 P.)

Begründen Sie zunächst kurz, warum sich unter diesen Voraussetzungen der Finanzmarkt im Ungleichgewicht befindet! Geben Sie anschließend explizit an, durch welche konkreten Kauf-/Verkaufsoperationen und Anlage-/Verschuldungsoperationen Arbitragegewinne im Zeitpunkt $t = 0$ erzielt werden können! Bestimmen Sie abschließend die Höhe des maximal erzielbaren Arbitragegewinns, wenn in $t = 0$ maximal 15 Optionen gekauft bzw. (leer-) verkauft werden können!

Lösung:

Die folgende Tabelle beinhaltet jeweils in Abhängigkeit vom tatsächlichen Aktienkurs in $t = 1$ die Werte von Kaufoption und Verkaufsoption im Zeitpunkt $t = 1$ sowie den Wert eines Portfolios bestehend aus einer Kaufoption und drei Verkaufsoptionen:

	KO(BP=58)	VKO(BP=51)	1 KO + 2 VKO
Kurs X-Aktie 80	22	0	22
Kurs X-Aktie 40	0	11	22

Im Gleichgewicht müsste der Wert dieses Portfolios beim unterstellten sicheren Zinssatz von 10 % genau 20 GE ($22/11=20$) betragen. Der aktuelle Preis P des Portfolios aus 1 KO und 2 VKO in $t = 0$ beträgt: $1 \cdot 11 + 2 \cdot 4 = 19$ GE. Es besteht folglich ein Marktgleichgewicht, da der identisch hohe Anspruch auf einen sicheren Rückfluss in $t = 1$ an einem gleichgewichtigen Markt nicht zwei unterschiedlich hohe Preise in $t = 0$ aufweisen kann. (Hinweis: Alternativ hätten aus den Angaben zu den beiden Optionen auch die implizierten Pseudowahrscheinlichkeiten für Kauf- und Verkaufsoption abgeleitet werden können. Da diese voneinander abweichen, kann der Markt nicht im Gleichgewicht sein.)

Es existieren Arbitragemöglichkeiten, da gilt: $P < M$. Bei Kauf von 5 KO und 10 VKO zum Gesamtkaufpreis von 95 GE in Verbindung mit einer Kreditaufnahme von 100 GE (Rückzahlungsbetrag des Kredits in $t = 1$ beträgt 110 GE) kann in $t = 0$ unter Berücksichtigung der Handelsbeschränkung ein Arbitragegewinn von 5 GE erzielt werden.

- d) Gehen Sie von der Ausgangssituation der Teilaufgabe c) aus. Angenommen, Sie erhalten die Zusatzinformation, dass die X-Aktie in $t = 0$ zu einem Preis von 58,18 GE gehandelt wird. Welche Auswirkungen in Bezug auf die optimale Arbitragestrategie und den maximal erzielbaren Arbitragegewinn hat dieses Zusatzwissen, wenn in $t = 0$ unverändert maximal 15 Optionen gekauft bzw. (leer-) verkauft werden können? (6 P.)

Lösung:

Bei einem Aktienkurs von 58,18 GE weist die Verkaufsoption einen Gleichgewichtspreis von 4 GE und die Kaufoption von 12 GE auf. Nur bei der Kaufoption weicht der Gleichgewichtspreis vom Marktpreis ab. Es werden folglich 15 Kaufoptionen zum Preis von 165 GE erworben und gleichzeitig 15 mal das Duplikationsportfolio der Kaufoption verkauft, also 8,25 Aktien zu 480 GE (leer-) verkauft und 300 GE sicher für eine Periode angelegt. Aus diesem Bündel an Geschäften resultiert in $t = 0$ – ohne weitere Zahlungskonsequenzen in $t = 1$ – ein sicherer Überschuss in Höhe von 15 GE. Der maximal mögliche Arbitragegewinn erhöht sich im Vergleich zu Teilaufgabe c) folglich um 10 GE.

Aufgabe 2: Modigliani-Miller-Modellwelt

20 Punkte

- a) Die Kapitalkosten der A-AG, B-AG und C-AG folgen dem Modigliani-Miller-Theorem. Für die Erwartungswerte μ der jährlichen Gesamtrückflüsse der drei Unternehmen, deren Standardabweichungen σ und deren Gesamtkapitalkosten f gilt: (10 P.)

$$\begin{array}{lll} \mu_A = 100 & \mu_B = 60 & \mu_C = 140 \\ \sigma_A = 200 & \sigma_B = 90 & \sigma_C = 280 \\ f_A = 0,09 & f_B = 0,12 & f_C = 0,10. \end{array}$$

Begründen Sie kurz, warum sich unter diesen Voraussetzungen der Finanzmarkt im Ungleichgewicht befindet! Geben Sie anschließend explizit an, welche Relationen zwischen dem sicheren Marktzinssatz r und den drei Gesamtkapitalkostensätzen in einem Marktgleichgewicht zwingend Gültigkeit haben müssen!

Lösung:

Im Marktgleichgewicht müssen Unternehmen der gleichen Risikoklasse, also Unternehmen mit übereinstimmendem Variationskoeffizienten V , zwingend den gleichen Gesamtkapitalkostensatz f aufweisen. Mit steigendem V muss f steigen. f muss zwingend größer als der Marktzinssatz r sein.

$$V_A = \frac{200}{100} = 2 \quad V_B = \frac{90}{60} = 1,5 \quad V_C = \frac{280}{140} = 2$$

$$V_A = V_C \Rightarrow f_A = f_C \text{ (aber : } 0,09 \neq 0,10 \Rightarrow \text{Ungleichgewicht)}$$

$$V_B < V_A \Rightarrow f_B < f_A \text{ (aber : } 0,12 > 0,09 \Rightarrow \text{Ungleichgewicht)}.$$

- b) Die Kapitalkosten der XY-AG folgen dem Modigliani-Miller-Theorem. Die XY-AG ist in der Ausgangssituation durch folgende Daten gekennzeichnet (alle nachfolgenden Angaben in Mio. GE): **(10 P.)**

$$D_E = 150 \quad M_E = 1.000 \quad D_F = 200 \quad M_F = 2.000 .$$

Durch eine Zusatzinvestition mit einer in $t = 0$ zu leistenden einmaligen Auszahlung von 2.000 könnte der Erwartungswert der (unendlich anfallenden) jährlichen Einzahlungsüberschüsse bei unverändertem Gesamtrisiko von 350 auf 570 erhöht werden.

Angenommen, die Zusatzinvestition könnte in vollem Umfang durch einen risikolosen Kredit zum geltenden Marktzins oder durch die Ausgabe neuer Aktien finanziert werden.

- Sollte die XY-AG das Projekt durchführen? Ist diese Entscheidung von der Finanzierungsentscheidung abhängig?
- Wie hoch ist im Falle einer kreditfinanzierten Investitionsdurchführung der neue Marktwert des Eigenkapitals?

Lösung:

$$f_E = \frac{150}{1.000} = 0,15 \quad ; \quad f_F = \frac{200}{2.000} = 0,1$$

$$f = 0,15 \cdot \frac{1.000}{3.000} + 0,1 \cdot \frac{2.000}{3.000} = 0,116666$$

$$K = -2.000 + \frac{570 - 350}{0,116666} = -114,29 < 0 \Rightarrow \text{Projekt unvorteilhaft !!!}$$

$$M_E^{neu} = M_E^{alt} + K = 1.000 - 114,29 = 885,71 .$$