Modul 32521: Finanz- und bankwirtschaftliche Modelle (Kurs 42000)

Lösungshinweise zur Einsendearbeit Nr. 2 im WS 2020/2021

Aufgabe 1: Konsum- und Investitionsplanung **50 Punkte**

Angenommen, drei Entscheider A, B und C verfügen im Zeitpunkt t = 0 über Mittel in Höhe von jeweils $Q_A = Q_B = Q_C = 300$ GE. Für die vom Konsum in den Zeitpunkten $t = 0$ (C_0) bzw. $t = 1$ (C_1) abhängigen Präferenzwerte der drei Entscheider gilt

$$\varphi_A = C_0 \cdot C_1 \quad \textit{und}$$
$$\varphi_B = C_0 \cdot C_1^{0,5} \; \textit{und}$$
$$\varphi_C = C_0^{0,5} \cdot C_1 \; .$$

a) Angenommen, A, B und C steht in t = 0 zunächst nur die Möglichkeit offen, durch Kassenhaltung Konsummöglichkeiten aus der Gegenwart (t = 0) in die Zukunft (t = 1) zu übertragen. Bestimmen Sie unter dieser Annahme das nutzenmaximale Volumen der von A, B und C zu realisierenden „Kassenhaltung K“ sowie die optimalen Konsumpläne! Kommentieren Sie kurz Ihre Ergebnisse! **(12 P.)**

Lösung:

Der Kassenhaltungsbetrag K muss so gewählt werden, dass der Präferenzwert φ maximiert wird. Da in t = 0 der zu Konsumzwecken zur Verfügung stehende Betrag C_0 dem Ausgangsbetrag Q abzüglich des für Kassenhaltung verwendeten Betrags K entspricht und der in t = 1 zu Konsumzwecken verfügbare Betrag C_1 dem Kassenhaltungsbetrag K entspricht, gilt für die drei zu unterscheidenden Präferenzfunktionen (in Abhängigkeit vom Volumen der Kassenhaltung K):

$$\begin{aligned}
\varphi_A &= C_0 \cdot C_1 & \textit{bzw.} \quad \varphi_B &= C_0 \cdot C_1^{0,5} & \textit{bzw.} \quad \varphi_C &= C_0^{0,5} \cdot C_1 \\
&= (Q-K)\cdot K & &= (Q-K)\cdot K^{0,5} & &= (Q-K)^{0,5}\cdot K \; . \\
&= Q\cdot K - K^2 & &= Q\cdot K^{0,5} - K^{1,5} & &
\end{aligned}$$

Im Optimum muss gelten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial K} = 0 \, ,$$ woraus für die drei Präferenzfunktionen der Entscheider folgt:

$$K_A = \frac{Q}{2} \quad bzw. \quad K_B = \frac{Q}{3} \quad bzw. \quad K_C = \frac{Q}{1,5}.$$

Für die optimalen Kassenhaltungsbeträge für A, B und C gilt folglich:

$$K_A^* = \frac{Q_A}{2} = \frac{300}{2} = 150$$
$$K_B^* = \frac{Q_B}{3} = \frac{300}{3} = 100$$
$$K_C^* = \frac{Q_C}{1,5} = \frac{300}{1,5} = 200.$$

Die nutzenmaximalen Konsumpläne für A, B und C lauten:

$$C_0^A = 150 \; und \; C_1^A = 150 \; bzw. \; C_0^B = 200 \; und \; C_1^B = 100 \; bzw. \; C_0^C = 100 \; und \; C_1^B = 200 .$$

A gewichtet Gegenwarts- und Zukunftskonsum gleich.

B hat eine Präferenz für Gegenwartskonsum und C eine Präferenz für Zukunftskonsum.

b) Angenommen, den beiden Entscheidern A und B steht in t = 0 ausschließlich die Möglichkeit offen, durch Realinvestitionen Konsummöglichkeiten aus der Gegenwart (t = 0) in die Zukunft (t = 1) zu übertragen. Dabei steht beiden gleichermaßen die Möglichkeit offen, in t = 0 finanzielle Mittel in ein Investitionsprogramm zu investieren, das bei einer beliebig hohen, in t = 0 zu leistenden Investitionsauszahlung von I in t = 1 zu Rückflüssen R in Höhe von $R = 4 \cdot I^{0,8}$ führt. **(18 P.)**

Bestimmen Sie unter dieser Annahme das nutzenmaximale Volumen der von A und B in Realinvestitionen zu investierenden Mittel sowie die optimalen Konsumpläne!

Lösung:

Der Investitionsbetrag muss so gewählt werden, dass der Präferenzwert φ maximiert wird. Da in t = 0 der zu Konsumzwecken zur Verfügung stehende Betrag C_0 dem Ausgangsbetrag Q abzüglich des für Investitionen verwendeten Betrags I entspricht und der in t = 1 zu Konsumzwecken verfügbare Betrag C_1 den Rückflüssen R aus den Investitionen entspricht, gilt für die beiden zu unterscheidenden Präferenzfunktionen (in Abhängigkeit vom Investitionsvolumen I):

$$\begin{aligned} \varphi_A &= C_0 \cdot C_1 & \text{bzw.} \quad \varphi_B &= C_0 \cdot C_1^{0,5} \\ &= (Q-I)\cdot(4\cdot I^{0,8}) & &= (Q-I)\cdot(4\cdot I^{0,8})^{0,5} \\ &= 4\cdot Q\cdot I^{0,8} - 4\cdot I^{1,8} & &= 2\cdot Q\cdot I^{0,4} - 2\cdot I^{1,4} \end{aligned}$$

Im Optimum muss gelten:

$\frac{\partial \varphi}{\partial I} = 0$, woraus für die beiden obigen Präferenzfunktionen folgt:

$$3{,}2\cdot Q\cdot I^{-0,2} - 7{,}2\cdot I^{0,8} = 0 \quad \text{bzw.} \quad 0{,}8\cdot Q\cdot I^{-0,6} - 2{,}8\cdot I^{0,4} = 0\,.$$

Nach einfacher Umformung ergibt sich dann für die optimalen Investitionsvolumina für A und B:

$$I_A^* = \frac{3{,}2\cdot Q_A}{7{,}2} = \frac{960}{7{,}2} = 133{,}33$$
$$I_B^* = \frac{0{,}8\cdot Q_B}{2{,}8} = \frac{240}{2{,}8} = 85{,}71\,.$$

Die nutzenmaximalen Konsumpläne für A und B lauten:

$$C_0^A = Q_A - I_A^* = 300 - 133{,}33 = 166{,}67$$
$$C_1^A = 4\cdot I_A^{*\,0,8} = 4\cdot 133{,}33^{0,8} = 200{,}45\,.$$

$$C_0^B = Q_B - I_B^* = 300 - 85{,}71 = 214{,}29$$

$$C_1^B = 4\cdot I_B^{*\,0,8} = 4\cdot 85{,}71^{0,8} = 140{,}76\,.$$

c) Angenommen, A und B steht in $t = 0$ jetzt neben der Möglichkeit zur Durchführung von Realinvestitionen zusätzlich die Möglichkeit offen, finanzielle Mittel in beliebiger Höhe zu einem Zinssatz von $r = 25\ \%$ am Finanzmarkt anzulegen. Ändert sich dadurch für A oder B das nutzenmaximale Volumen der in Realinvestitionen zu investierenden Mittel und das Konsumniveau in $t = 0$? **(20 P.)**

Lösung:

Vorüberlegung: Zu einer Verminderung des Investitionsvolumens kann es überhaupt nur dann kommen, wenn in der Ausgangssituation Investitionen getätigt wurden, deren Grenzrendite unterhalb des Anlagezinses von 25 % liegt. In diesem Fall würden einerseits die Beträge sinken, die in Realinvestitionen investiert werden (Realinvestitionen würden partiell durch Finanzinvestitionen substituiert), andererseits würde auch der Konsum in t = 0 sinken, da es insgesamt vorteilhaft wäre, bei einer Grenzrendite von 25 % auf Konsummöglichkeiten in t = 0 zu verzichten. Damit eine Anlage für A oder B am Finanzmarkt überhaupt in Frage kommt, müssen folglich zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein:

1. Die Rendite der Finanzanlagemöglichkeit muss die Grenzrendite, die bei einer weiteren Ausdehnung des Realinvestitionsprogramms erzielt würde, überschreiten.

2. Es muss für A oder B in t = 0 vorteilhaft sein, bei einer Grenzrendite in Höhe des Finanzmarktzinses auf weitere Konsummöglichkeiten in t = 0 zu verzichten.

Zunächst ist also zu bestimmen, bei welchem Realinvestitionsbetrag I^* die Grenzrendite des Realinvestitionsprogramms gerade dem Finanzmarktzins entspricht. Aus

$$\frac{\partial R}{\partial I} = 1{,}25 \quad \text{folgt:} \quad 3{,}2 \cdot I^{-0{,}2} = 1{,}25 \Leftrightarrow I^* = 109{,}95\,.$$

Bis zu einem Investitionsbetrag in Höhe von 109,95 GE übersteigt die Grenzrendite des Investitionsprogramms den Anlagezins am Finanzmarkt.

Situation des Investors B:

Aus Aufgabenteil b) ist bekannt, dass B nicht bereit wäre, diesen Betrag überhaupt zu investieren. Da B seinen Präferenzwerte bei einem kleineren Investitionsvolumen als $I^* = 109{,}95$ maximiert, also sogar auf die Realisation von Realinvestitionen mit einer Rendite oberhalb des Anlagezinses am Finanzmarkt verzichtet, wird B keine Anlagen am Finanzmarkt tätigen. Sein optimaler Konsum- und Investitionsplan verändert sich durch die zusätzliche Anlagemöglichkeit am Finanzmarkt nicht.

Situation des Investors A:

A realisiert in der Ausgangssituation hingegen mit 133,33 GE ein höheres Investitionsvolumen als $I^* = 109{,}95$, realisiert also Realinvestitionsprojekte mit einer Rendite unterhalb des Anlagezinses am Finanzmarkt. A kann folglich durch Verminderung seines Realinvestitionsvolumens um 23,38 GE (von 133,33 auf 109,95) in Verbindung mit Geldanlagen am Finanzmarkt in Höhe von 23,38 GE ein höheres Nutzenniveau erreichen. Der mögliche Konsumbetrag des A in t = 1 stiege (bei unverändertem Konsumbetrag in t = 0 in Höhe von 166,67 GE) durch diese „Umschichtung“ von 200,45 GE auf $(4 \cdot 109{,}95^{0{,}8} + 23{,}38 \cdot 1{,}25 =))$ 201,02 GE.

Für A ist aber zusätzlich zu berücksichtigen, dass es bedingt durch die zusätzliche Anlagemöglichkeit am Finanzmarkt vorteilhaft wird, auf zusätzliche Konsummöglichkeiten im Zeitpunkt t = 0 zu verzichten (vgl. Bedingung 2), also die Anlage am Finanzmarkt über den Betrag von 23,38 GE hinaus (zu Lasten des Konsums in t = 0) zu erhöhen. Rechnerisch ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\varphi_A &= C_0 \cdot C_1 \\
&= (300 - I^* - A_0) \cdot (4 \cdot I^{*0,8} + 1,25 \cdot A_0) \\
&= (300 - 109,95 - A_0) \cdot (4 \cdot 109,95^{0,8} + 1,25 \cdot A_0) \\
&= (190,05 - A_0) \cdot (171,80 + 1,25 \cdot A_0) \\
&= 32.650,59 + 65,76 \cdot A_0 - 1,25 \cdot A_0^2
\end{aligned}$$

Aus $\frac{\partial \varphi_A}{\partial A_0} = 0$ folgt: $A_0^* = 26,30$.

Unter Berücksichtigung der Anlagemöglichkeit am Finanzmarkt ist es für A optimal, in t = 0 einen Betrag von 163,75 GE (= 300 – 109,95 – 26,30) zu konsumieren, einen Betrag von 109,95 GE in Realinvestitionen sowie einen Betrag von 26,30 GE in Finanzanlagen zu investieren und sich dadurch Konsummöglichkeiten in t = 1 in Höhe von $(4 \cdot 109,95^{0,8} + 26,30 \cdot 1,25 =)$ 204,67 GE zu eröffnen.