Übungsaufgabe 1:

1.1) In einer Gesellschaft sollen elf Wähler ($i = 1, ..., 11$) über die fünf politischen Alternativen a, b, c, d und e abstimmen. Die Präferenzordnungen der Wähler hinsichtlich dieser Alternativen seien wie folgt gegeben:

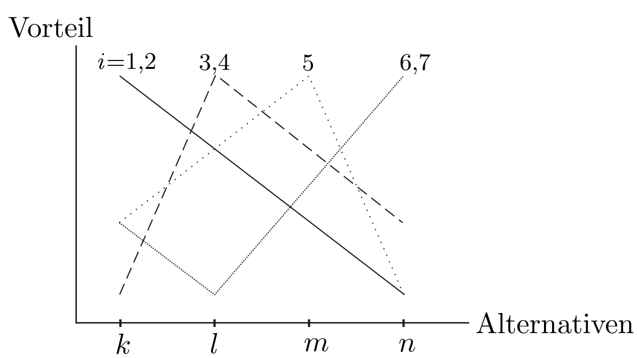
Wähler	Präferenzordnung
$i = 1, 2, 3$	$aP_ibP_icP_idP_ie$
$i = 4, 5$	$eP_iaP_ibP_icP_id$
$i = 6, 7$	$aP_idP_ieP_ibP_ic$
$i = 8, 9$	$bP_icP_iaP_ieP_id$
$i = 10, 11$	$dP_ieP_iaP_ibP_ic$

a) Ermitteln Sie den Condorcet-Gewinner und stellen Sie die entsprechende Gruppenpräferenz nach der Mehrheitsregel auf.

b) Es wird nun das Approval-Verfahren angewendet. Welche Alternative setzt sich durch, wenn die Wähler jeweils ihrer ersten und zweiten Alternative einen Punkt geben? Stellen Sie dies dem Ergebnis des Approval-Verfahrens gegenüber, wenn an die erste und vierte Alternative jeweils ein Punkt vergeben wird. Was fällt Ihnen beim Approval-Verfahren hinsichtlich des Condorcet-Gewinners auf?

c) Bestimmen Sie die Gruppenpräferenz anhand der Borda-Regel. Streichen Sie anschließend die Alternativen b und c und überprüfen Sie, ob die Borda-Regel die Bedingung I (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen) erfüllt.

1.2) Gegeben seien die Vorteilskurven von sieben Wählern ($i = 1, ..., 7$) hinsichtlich der Alternativen k, l, m und n.



a) Stellen Sie das Präferenzprofil der Wähler mit Hilfe der Schlechter-Relation auf.

b) Für welche/n Wähler sind mehrgipflige Präferenzen beobachtbar? Welche Konsequenzen hat dies für eine Condorcet-Abstimmung?

c) Nehmen Sie an, es wird stufenweise über zwei Alternativen abgestimmt. In welcher Reihenfolge müsste eine Condorcet-Abstimmung erfolgen, damit Wähler $i = 4$ seine präferierte Alternative durchsetzen kann?

Übungsaufgabe 2:

Betrachten Sie ein Land, in dem die Bürger aus dem Konsum des öffentlichen Gutes Z Nutzen schöpfen. Die gesellschaftliche Nutzenfunktion lautet dabei

$$U(z) = z - \frac{1}{5}z^2.$$

Das öffentliche Gut wird von einer zentralen Behörde bereitgestellt. Aus administrativen Gründen ist es erforderlich, neben dem Behördenleiter weiteres Personal zu Kosten in Höhe von s zu beschäftigen. Die Gesamtkosten belaufen sich schließlich auf

$$K(s, z) = \frac{1}{5}\left[\left(2 - \sqrt{s}\right) z + s\right].$$

(a) Stellen Sie den Lagrange-Ansatz zur Ermittlung der effizienten Menge des öffentlichen Gutes und des einzusetzenden Personals im Allgemeinen und unter Verwendung der obigen Funktionen auf. Bestimmen Sie jeweils auch die Bedingungen erster Ordnung.

(b) Ermitteln Sie die effiziente Menge des öffentlichen Gutes z_e, die effizienten Ausgaben für Stabspersonal s_e und die zugehörige Netto-Wohlfahrt.

Gehen Sie nun davon aus, dass der Behördenleiter eine von der Netto-Wohlfahrt Ω abweichende Zielfunktion besitzt. Diese lautet

$$V = U(z) - K(s, z) + 0.03s$$

(c) Was impliziert V?

(d) Ermitteln Sie die Menge des öffentlichen Gutes, die der Behördenleiter produziert, und die Ausgaben des Stabspersonals, die der Behördenleiter tätigt.

(e) Prüfen Sie rechnerisch, welche Art der Ineffizienz bei der Bereitstellung des öffentlichen Gutes vorliegt.

(f) Es sei $\tilde{K} = \frac{1}{5}[(\alpha - \beta\sqrt{s})z + s]$ die vom Behördenleiter an das Aufsichtsgremium übermittelte Kostenfunktion. Welchen Wert nehmen α und β innerhalb der berichteten Kostenfunktion an?

Musterlösungen

Übungsaufgabe 1:

1.1)

a) Die Condorcet-Abstimmung liefert folgendes Ergebnis:

- a vs. b: 9 zu 2 Stimmen $\Rightarrow a$
- a vs. c: 9 zu 2 Stimmen $\Rightarrow a$
- a vs. d: 9 zu 2 Stimmen $\Rightarrow a$
- a vs. e: 7 zu 4 Stimmen $\Rightarrow a$

Die Alternative a setzt sich also in jeder paarweisen Abstimmung gegen die andere Alternativen durch und ist somit Condorcet-Gewinner. Um nun die vollständige Gruppenpräferenz nach der Mehrheitsregel zu bestimmen, muss über die anderen Alternativen paarweise abgestimmt werden:

- b vs. c: 11 zu 0 Stimmen $\Rightarrow b$
- b vs. d: 7 zu 4 Stimmen $\Rightarrow b$
- b vs. e: 5 zu 6 Stimmen $\Rightarrow e$
- c vs. d: 7 zu 4 Stimmen $\Rightarrow c$
- c vs. e: 5 zu 6 Stimmen $\Rightarrow e$
- d vs. e: 7 zu 4 Stimmen $\Rightarrow d$

Die Aufstellung einer Gruppenpräferenz ist nicht möglich. Die Alternative a ist zwar der Condorcet-Gewinner, allerdings existiert ein Zyklus über die Alternativen b, c, d und e.

b) Im Rahmen des Approval-Verfahrens wird zunächst der ersten und zweiten Alternative jeweils ein Punkt gegeben. Daraus ergeben sich folgende Punktwerte für die Politikalternativen:

- a: 7 Punkte
- b: 5 Punkte
- c: 2 Punkte
- d: 4 Punkte
- e: 4 Punkte

Somit setzt sich die Alternative a und damit der Condorcet-Gewinner im Approval-Verfahren durch.

Nun wird das Approval-Verfahren abgeändert: die erste und die veirte Alternative erhalten nun jeweils einen Punkt. Wir erhalten die Punktwerte:

- a: 5 Punkte
- b: 6 Punkte

- c: 2 Punkte
- d: 5 Punkte
- e: 4 Punkte

Bei dieser Abstimmung setzt sich die Alternative b durch. Dabei handelt es sich nicht um den Condorcet-Gewinner. Das Approval-Verfahren führt somit nicht in jedem Fall zur Wahl des Condorcet-Gewinners.

c) Die Anwendung der Borda-Regel führt zu folgenden Punkten für die Alternativen:

- a: 45 Punkte
- b: 36 Punkte
- c: 25 Punkte
- d: 28 Punkte
- e: 31 Punkte

Daraus ergibt sich folgende Gruppenpräferenz: $aPbPePdPc$.

Streichen wir nun im weiteren die Alternativen b und c ergibt sich das Präferenzprofil:

Wähler	Präferenzordnung
$i = 1, 2, 3$	aP_idP_ie
$i = 4, 5$	eP_iaP_id
$i = 6, 7$	aP_idP_ie
$i = 8, 9$	aP_ieP_id
$i = 10, 11$	dP_ieP_ia

Wendet man nun die Bordaregel an erhalten wir die Punktwerte:

- a: 27 Punkte
- d: 20 Punkte
- e: 19 Punkte

Wir erhalten die Gruppenpräferenz: $aPdPe$. Hier zeigt sich nun folgender Aspekt: Bei der vorigen Abstimmung mit den Alternativen b und c zog die Gruppe die Alternative d der Alternative e vor. Durch das Streichen der beiden Alternativen ändert sich die Gruppenpräferenz über die Alternativen d und e. Somit wird die Bedingung I und somit die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen verletzt.

1.2)

a) Aus der Abbildung der Vorteilskurven lässt sich folgendes Präferenzprofil ableiten:

Wähler	Präferenzordnung
$i = 1, 2$	$kP_i lP_i mP_i n$
$i = 3, 4$	$kS_i lP_i mP_i n$
$i = 5$	$kS_i lS_i mP_i n$
$i = 6, 7$	$kP_i lS_i mS_i n$

b) Anhand der Abbildung lässt sich nun erkennen, dass die Wähler 6 und 7 mehrgipflige Präferenzen bezüglich der vier Alternativen aufweisen. Für die Condorcet-Abstimmung folgt daraus, dass kein eindeutiger Condorcet-Gewinner existiert.

c) Der Wähler $i = 4$ präferiert die Alternative l. Man kann nun wie folgt abstimmen lassen:

- 1. Runde: n vs. $k \Rightarrow$ 4:3 $\Rightarrow n$
- 2. Runde: n vs. $m \Rightarrow$ 2:5 $\Rightarrow m$
- 3. Runde: m vs. $l \Rightarrow$ 3:4 $\Rightarrow l$

Durch eine solche Agenda gewinnt die Alternative l.

Übungsaufgabe 2:

(a) Das Optimierungsproblem lässt sich als Maximierung der Netto-Wohlfahrt über s und z,

$$\max_{s\geq 0, z\geq 0} \Omega(s,z) = U(z) - K(s,z),$$

unter der Nebenbedingung der Nicht-Negativität der Netto-Wohlfahrt,

$$U(z) - K(s,z) \geq 0,$$

darstellen. Wir können daher folgenden Lagrange-Ansatz aufstellen:

$$\mathcal{L} = U(z) - K(s,z) + \lambda(U(z) - K(s,z))$$

bzw.

$$\mathcal{L} = \left[z - \frac{1}{5}z^2 - \frac{1}{5}\left((2-\sqrt{s})z + s\right)\right](1+\lambda).$$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten allgemein:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_s &= -K_s(s,z) - \lambda K_s(s,z) = 0,\\
\mathcal{L}_z &= U_z(z) - K_z(s,z) + \lambda\left[U_z(z) - K_z(s,z)\right] = 0,\\
\mathcal{L}_\lambda &= U(z) - K(s,z) = 0.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der konkreten Funktionen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_s &= -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{z}{2\sqrt{s}}\right) = 0,\\
\mathcal{L}_z &= 1 - 0.4z - 0.2(2-\sqrt{s}) = 0,\\
\mathcal{L}_\lambda &= z - \frac{1}{5}z^2 - \frac{1}{5}\left((2-\sqrt{s})z + s\right) = 0.
\end{aligned}$$

(b) Wir gehen nun davon aus, dass die Produktion des öffentlichen Gutes gesamtgesellschaftlich wünschenswert ist. Dadurch wird für die Nebenbedingung impliziert, dass

$$U(z) - K(s,z) > 0$$

bzw.

$$z - \frac{1}{5}z^2 - \frac{1}{5}\left((2-\sqrt{s})z + s\right).$$

Dies hat zur Konsequenz, dass für den Lagrangemultiplikator $\lambda = 0$ gilt und die Bedingungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_s &= -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{z}{2\sqrt{s}}\right) = 0,\\
\mathcal{L}_z &= 1 - 0.4z - 0.2(2-\sqrt{s}) = 0
\end{aligned}$$

lauten.

Das Umstellen der ersten Bedingung erster Ordnung liefert

$$1 - \frac{z}{2\sqrt{s}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{s} = \frac{z}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad s = \frac{z^2}{4}.$$

Setzen wir $\sqrt{s} = \frac{z}{2}$ in die zweite Bedingung erster Ordnung ein, so erhalten wir

$$1 - 0.4z - 0.4 + 0.1z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z_e = 2$$

bzw. $s_e = 1$. Die zugehörige Netto-Wohlfahrt beträgt

$$\Omega = U(z_e) - K(s_e, z_e) = 1.2 - 0.6 = 0.6.$$

(c) Die Zielfunktion des Behördenleiters impliziert, dass dieser eine zusätzliche Präferenz für Stabspersonal besitzt.

(d) Da die Bereitstellung des öffentlichen Gutes gesamtgesellschaftlich wünschenswert ist, gilt für die Nebenbedingung $U(z) - K(s,z) > 0$. Folglich ist auch der dazugehörige Lagrange-Multiplikator Null. In diesem Zusammenhang lauten die Bedingungen erster Ordnung des Lagrange-Ansatzes aus Sicht des Behördenleiters

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s &= -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{z}{2\sqrt{s}}\right) + 0.03 = 0, \\ \mathcal{L}_z &= 1 - 0.4z - 0.2(2 - \sqrt{s}) = 0, \\ \lambda &= 0 \quad \text{für} \quad U(z) - K(s,z) > 0. \end{aligned}$$

Das Umstellen der ersten Bedingung erster Ordnung nach s liefert dabei

$$-0.17 + \frac{z}{10\sqrt{s}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{s} = \frac{z}{1.7} \quad \Longleftrightarrow \quad s = \frac{z^2}{1.7^2}.$$

Sezten wir $\sqrt{s} = \frac{z}{1.7}$ in die zweite Bedingung erster Ordnung ein, so erhalten wir

$$0.6 - 0.4z + \frac{0.2z}{1.7} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z_b = 2.125$$

bzw. $s_b = 1.5625$.

(e) Bei X-Ineffizienz gilt: $K_s(s_b, z_b) \neq 0$. Setzen wir s_b und z_b in $K_s = -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{z}{2\sqrt{s}}\right)$ ein, folgt $K_s(s_b, z_b) = -0.2 + \frac{2.125}{10\sqrt{1.5625}} = -0.03 < 0$. Somit liegt eine X-Ineffizienz vor.

Als Nächstes prüfen wir strukturelle Effizienz. Hierfür muss gelten

$$U_z(z_b) = K_z(s_b, z_b).$$

Mit $U_z = 1 - 0.4z$ und $K_z = 0.2(2 - \sqrt{s})$ erhalten wir

$$U_z(z_b) = 0.15 = K_z(s_b, z_b) = 0.15.$$

Somit ist die Allokation strukturell effizient.

(f) Um dem Aufsichtsgremium zu suggerieren, dass sich der Behördenleiter an dessen Vorgaben orientiert hat, muss die berichtete Kostenfunktion $\tilde{K}$ der Allokation $s_b = 1.5625$ und $z_b = 2.125$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \tilde{K}_s &= -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{\beta z_b}{2\sqrt{s_b}}\right) = 0, && (1) \\ \tilde{\Omega}_z &= 1 - 0.4z - 0.2\,(\alpha - \beta\sqrt{s_b}) = 0, && (2) \\ U(z_b) &\geq \tilde{K}(s_b, z_b) && (3) \end{aligned}$$

aufweisen. Aus (1) erhalten wir

$$\beta = \frac{2\sqrt{s_b}}{z_b} = 1.176$$

und aus (2) folgt

$$\alpha = 5 + \beta\sqrt{s_b} - 2z_b = 2.221.$$

Die Wohlfahrt beträgt

$$\tilde{\Omega} = U(z_b) - \tilde{K}(s_b, z_b) = 0.9005 > 0.$$