Musterlösung

Aufgabe 1

(a) Der Nutzen des Gesangslehrers hängt nur von seiner eigenen Aktivität Z ab. Der Nutzen des Studenten hängt von seiner eigenen Aktivität X aber auch von dem Gesang Z ab. Insofern liegt hier eine Externalität vor. Da $W'(z) = -(z-8)$ liegt eine positive Externalität für $z < 8$ und eine negative Externalität für $z > 8$ vor.

(b) Pareto-Effizienz folgt aus Maximierung der Nutzensumme $U^1(z) + U^2(x,z)$ also durch

$$\max_{x,z} \quad 6 - \frac{1}{10}(z-12)^2 + 6 - \frac{1}{2}(z-8)^2 + 4 - (x-4)^2.$$

Die zugehörigen Bedingungen erster Ordnung sind

$$\begin{aligned} -\frac{2}{10}(z_e - 12) - \frac{2}{2}(z_e - 8) = 0 \quad &\iff \quad 12 - z_e - 5z_e + 40 = 0 \\ &\iff \quad z_e = \frac{52}{6} = 8.67, \\ -2(x_0 - 4) = 0 \quad &\iff \quad x_0 = 4. \end{aligned}$$

Effizient wäre es, wenn der Lehrer 8.67 Stunden Gesang unterrichtet und der Student 4 Stunden lernt. Die zugehörigen Nutzenwerte sind

$$\begin{aligned} U^1(8.6\bar{7}) &= 6 - \frac{3.33^2}{10} = 4.89, \\ U^2(4, 8.6\bar{7}) &= 6 - \frac{1}{2}(0.6\bar{7})^2 + 4 = 9.77. \end{aligned}$$

(c) (z_g, x_g) heißt Cournot-Nash-Gleichgewicht, falls

$$\begin{aligned} U^1(z_g) &\geq U^1(z) \quad \forall z \\ U^2(x_g, z_g) &\geq U^2(x, z_g) \quad \forall x. \end{aligned}$$

Da der Nutzen von Person 1 unabhängig von X ist, wählt Person 1 ihre dominante Strategie

$$z_{01} = \arg\max_z U^1(z).$$

Maximierung der Nutzenfunktion führt zu

$$U_z^1 = -\frac{2}{10}(z_{01} - 12) = 0 \quad \iff \quad z_{01} = 12.$$

Aufgrund der Separabilität wählt Person 2 ebenfalls ihre dominante Strategie, also

$$x_0 = \arg\max_x V(x).$$

Maximierung der Funktion $V(x)$ gibt

$$V'(x) = -2(x_0 - 4) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 = 4.$$

Bei nicht-kooperativem Verhalten gibt der Gesangslehrer 12 Stunden Unterricht und der Student lernt 4 Stunden.
Die zugehörigen Nutzenwerte sind

$$\begin{aligned} U^1(12) &= 6, \\ U^2(4,12) &= W(12) + V(4) = 6 - 8 + 4 = 2. \end{aligned}$$

(d) Bei Vertragsablehnung hat Person 1 den Nutzen $U^1(z_{01})$. In Aufgabenteil (c) hatten wir

$$z_{01} = 12 \quad \text{und} \quad U^1(z_{01}) = 6$$

ermittelt. Der Nutzen bei Vertragsannahme des Angebotes $(\bar{z}, g = F(\bar{z}))$ beträgt

$$U^1(\bar{z}) + g$$

Unter der Annahme, dass Person 1 das Angebot bei Indifferenz annimmt, wird Person 2 der Person 1 genau den entgangenen Nutzen bezahlen. Es gilt also

$$U^1(z_{01}) = U^1(\bar{z}) + g \quad \text{bzw.} \quad g = U^1(z_{01}) - U^1(\bar{z}) = \frac{1}{10}(\bar{z} - 12)^2 = F(\bar{z}).$$

(e) Der Nutzen der Person 2 bei dem Angebot $(\bar{z}g = F(\bar{z}))$ beträgt

$$U^2(x_0, \bar{z}) - g = U^2(x_0, \bar{z}) - F(\bar{z}) = V(x_0) + W(\bar{z}) - U^1(z_{01}) + U^1(\bar{z}).$$

Maximierung nach $\bar{z}$ ergibt

$$W_z(\bar{z}) + U^1_z(\bar{z}) = 0$$

und wir erhalten $\bar{z} = 8.67$. Der Geldbetrag g folgt aus

$$g = F(8.67) = \frac{1}{10}(8.67 - 12)^2 = 1.1\bar{1}.$$

(f) Die Nutzenmöglichkeitsgrenze ist gegeben durch

$$M = \{u_1, u_2 \big| u_2 = W\left[\bar{U}^1(u_1)\right] + V(x_0)\}.$$

Wir ermitteln zunächst die Umkehrfunktion $\bar{U}^1(u_1)$.

$$\begin{aligned} & u_1 = U^1(z) = 6 - \frac{1}{10}(z - 12)^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{10}(z - 12)^2 = 6 - u_1 \\ \Longleftrightarrow \quad & (z - 12) = \pm\sqrt{10(6 - u_1)}. \end{aligned} \tag{A1}$$

In (A1) gibt es 2 Lösungen, eine mit dem „+“ und eine mit dem „−“-Zeichen. Setzen wir nun in (A1) z_e ein, so ist offensichtlich, dass die Lösung mit dem „+“ Zeichen ausgeschlossen werden kann. Aus (A1) folgt daher

$$z = 12 - \sqrt{10(6-u_1)} = \bar{U}^1(u_1). \tag{A2}$$

Setzen wir (A2) und $V(x_0) = 4$ in $u_2 = W(z) + V(x_o)$ ein, so erhalten wir

$$u_2 = 10 - \frac{1}{2}\left[4 - \sqrt{10(6-u_1)}\right]^2 =: \bar{U}^1(u_1). \tag{A3}$$

(A3) ist die Nutzenmöglichkeitsgrenze. Einsetzen der Zahlenwerte aus der Wertetabelle ergibt

u_2	2.98	5.28	7.30	8.91	9.90	9.65	2
u_1	0	1	2	3	4	5	6

Zeichnen wir die Werte in ein (u_1, u_2) Diagramm, so erhalten wir

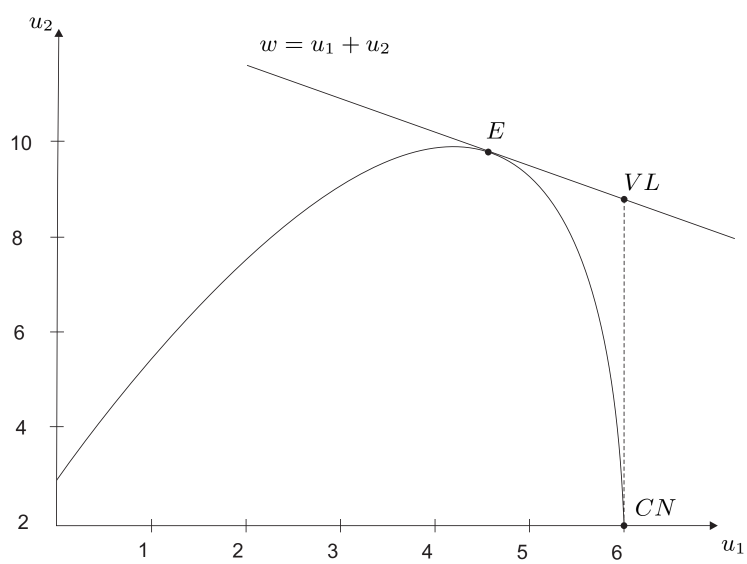

Abbildung 1: Die Nutzenmöglichkeitsgrenze

(g) In Abbildung 1 ist *CN* das Cornout-Nash-Gleichgewicht bei nicht-kooperativem Verhalten und alle pareto-effizienten Kombinationen liegen auf der w-Geraden.

(h) Mögliche Verhandlungslösungen, bei denen sich Person 1 verbessert, liegen auf der gestrichelten Geraden zwischen den Punkten *VL* und *CN*.

Aufgabe 2

(a) Die Steuereinnahmenfunktion berechnet sich gemäß $T(r_t) = \varphi(\Psi(r_t)) = 4(1 - e^{-\frac{1}{5}r_t})$.

(b) Bei einem Nettosteueraufkommen von $\tilde{t} = 1.5$ muss das Bruttosteueraufkommen $\tau = \frac{\tilde{t}}{0.8} = 1.875$ betragen. Der Einkommensverlust des repräsentativen Besteuerten errechnet sich aus

$$\begin{aligned} & \Psi(r_t) = 5(1 - e^{-\frac{1}{5}r_t}) = 1.875 \\ \iff \quad & e^{-\frac{1}{5}r_t} = \frac{5}{8} \\ \iff \quad & r_t = -5\ln\left(\frac{5}{8}\right) \approx 2.35. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass die monetäre Zusatzlast der Besteuerung $ZL = 2.35 - 1.875 = 0.475$ beträgt. Die Verwaltungskosten belaufen sich auf $VK = 1.875 - \varphi(1.875) = 0.375$. Damit sind die Gesamtkosten der Besteuerung 0.85, wovon 44.12% auf die Verwaltungskosten und 55.88% auf die Zusatzkosten entfallen.

(c) Es gilt $n_s = n_t$ und damit erhält jeder Subventionsempfänger den Betrag r_s, welcher sich gemäß

$$\begin{aligned} & S(r_s) = 1.5 = T(r_t) \\ \iff \quad & 5(e^{\frac{1}{5}r_s} - 1) = 1.5 \\ \iff \quad & e^{\frac{1}{5}r_s} = 1.3 \\ \iff \quad & r_s = 5\ln(1,3) \approx 1.31 \end{aligned}$$

errechnet.

(d) Es soll gelten $n_t = 3n_s$ und damit $S(r_s) = 3T(r_t)$. Somit gilt für den Auszahlungsbetrag nun

$$\begin{aligned} & S(r_s) = 4.5 \\ \iff \quad & 5(e^{\frac{1}{5}r_s} - 1) = 4.5 \\ \iff \quad & e^{\frac{1}{5}r_s} = 1.9 \\ \iff \quad & r_s = 5\ln(1.9) \approx 3.21. \end{aligned}$$

(e) Soll jeder Subventionsempfänger eine Auszahlung von $r_s = 2.35$ erhalten, so muss pro Empfänger das Nettosteueraufkommen von $S(2.35) \approx 3$ betragen. Des Weiteren folgt aus $r_t = 2.35$, dass das Nettosteueraufkommen pro Besteuerten $\tilde{t} = 1.5$ beträgt. Somit ist $3n_s = 1,5xn_s$, mit x als dem Gruppengrößenmultiplikator, zu lösen. Es folgt $x = 2$ und daher muss die Gruppe der Besteuerten zweimal größer sein als die Gruppe der Subventionsempfänger.

(f) Es gilt $m_t = n_t b_t$, mit b_t als dem Mitgliedsbeitrag pro Kopf. Daraus folgt $P^t(m_t, n_t) = b_t$. Des Weiteren ist das Einkommen eines Besteuerten gegeben durch $y_t = y_{t0} - r_t - b_t$. Die Einkommenseinbuße aus Besteuerung lässt sich schreiben als

$$
\begin{aligned}
& T = 4(1 - e^{-\frac{1}{5} r_t}) \\
\iff \quad & e^{-\frac{1}{5} r_t} = 1 - \frac{T}{4} \\
\iff \quad & r_t = -5 \ln\left(1 - \frac{T}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Das Steueraufkommen pro Kopf ergibt sich aus $T = \frac{\theta}{n_t} = \frac{p_s}{p_t n_t} = \frac{p_s}{b_t n_t}$. Somit gilt $y_t = y_{t0} + 5 \ln\left(1 - \frac{1}{4}\frac{p_s}{n_t} b_t^{-1}\right) - b_t$. Maximierung des Einkommens liefert

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial y_t}{\partial b_t} = 5 \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\frac{p_s}{n_t} b_t^{-1}} \frac{1}{4}\frac{p_s}{n_t} b_t^{-2} - 1 = 0 \\
\iff \quad & \frac{5}{4}\frac{p_s}{n_t b_t^2} = \frac{4 n_t b_t - p_s}{4 n_t b_t} \\
\iff \quad & 5 p_s = 4 n_t b_t^2 - p_s b_t \\
\iff \quad & b_t^2 - \frac{1}{4}\frac{p_s}{n_t} b_t - \frac{5}{4}\frac{p_s}{n_t} = 0.
\end{aligned}
$$

Gemäß dem Satz von Viéta besitzt die Gleichung die beiden Lösungen

$$
\begin{aligned}
b_{t1} &= \frac{1}{8}\frac{p_s}{n_t} + \left[\left(\frac{1}{8}\frac{p_s}{n_t}\right)^2 + \frac{5}{4}\frac{p_s}{n_t}\right]^{0.5}, \\
b_{t2} &= \frac{1}{8}\frac{p_s}{n_t} - \left[\left(\frac{1}{8}\frac{p_s}{n_t}\right)^2 + \frac{5}{4}\frac{p_s}{n_t}\right]^{0.5}. \qquad \text{(A4)}
\end{aligned}
$$

Die zweite Lösung (A4) ist aber negativ, da der Term in der Klammer größer ist als derjenige davor. Ein negativer Mitgliedsbeitrag ist allerdings ausgeschlossen, so dass der optimale Beitrag durch b_{t1} gegeben ist. Einsetzen in $P^t(m_t, n_t)$ ergibt die Reaktionsfunktion

$$
R^t(p_s) = \frac{1}{8}\frac{p_s}{n_t} + \left[\left(\frac{1}{8}\frac{p_s}{n_t}\right)^2 + \frac{5}{4}\frac{p_s}{n_t}\right]^{0.5}.
$$

(g) Durch Einsetzen der Gruppengrößen ergeben sich die Reaktionsfunktionen

$$
\begin{aligned}
R^t(p_s) &= \frac{3}{4} p_s + 7, \\
R^s(p_t) &= \frac{1}{2} p_t + 2.
\end{aligned}
$$

Beachten von $p_t^* = R^t(p_s^*)$, $p_s^* = R^s(p_t^*)$ und einsetzen der ersten in die zweite Gleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
&& p_s^* &= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}p_s^* + 7\right] + 2 \\
\iff && p_s^* &= \frac{3}{8}p_s^* + 5.5 \\
\iff && p_s^* &= 8.8.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt $p_t^* = 13.6$.