Musterlösung

Aufgabe 1

(a) Zunächst muss die zu der gegebenen Produktionsfunktion korrespondierende Kostenfunktion ermittelt werden. Dazu wird die Umkehrfunktion gebildet:

$$x = \alpha\ell^2 \quad \Longrightarrow \quad \ell = \sqrt{\frac{x}{\alpha}}.$$

Die Kostenfunktion is entsprechend durch

$$K(x) = w\sqrt{\frac{x}{\alpha}}$$

gegeben. Die Grenzkosten des Anbieters werden durch die partielle Ableitung bestimmt:

$$K_x = \frac{w}{2\alpha\sqrt{\frac{x}{\alpha}}} = \frac{w}{2\sqrt{\alpha x}}.$$

Die Durchschnittskosten sind durch

$$\frac{K(x)}{x} = \frac{w\sqrt{\frac{x}{\alpha}}}{x} = \frac{w}{\sqrt{\alpha x}}$$

charakterisiert. In einem natürlichen Monopol gilt, dass die Durchschnittskosten in der produzierten Menge sinken. Dies ist erfüllt, wenn die Grenzkosten kleiner als die Durchschnittskosten sind, d.h. $K_x < \frac{K(x)}{x}$. Formal lässt sich dies wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{K(x)}{x} &= \frac{1}{x}\left[-\frac{K(x)}{x} + K_x\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[-\frac{w}{\sqrt{\alpha x}} + \frac{w}{2\sqrt{\alpha x}}\right].
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist negativ und die Stückkosten sinken, wenn

$$-\frac{K(x)}{x} + K_x < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad K_x < \frac{K(x)}{x}. \tag{A1}$$

Prüfen wir nun, für welche Parameterwerte (A1) erfüllt ist:

$$\frac{w}{\sqrt{\alpha x}} > \frac{w}{2\sqrt{\alpha x}}.$$

Durch Umformungen der Relation erhalten wir

$$2 > 1 \tag{A2}$$

für alle $\alpha > 0$. Die Durchschnittskosten sinken also in x für alle $\alpha > 0$.

(b) Aus der gegebenen Nachfragefunktion lässt sich die inverse Nachfragefunktion

$$P(x) = a - bx$$

ermitteln. Der soziale Planer maximiert nun die Wohlfahrtsfunktion:

$$\max_{x} \quad \Omega(x) = \int_0^x P(x)dx - K(x).$$

Die Bedingung erster Ordnung ist dann gegeben durch

$$\Omega_x = P(x) - K_x(x) = 0.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$a - bx - \beta = 0.$$

Die effiziente Menge ist somit

$$x^* = \frac{a - \beta}{b}.$$

Diese Menge wird in die inverse Nachfragefunktion eingesetzt um den optimalen Preis zu ermitteln:

$$p_x^* = \beta.$$

Im sozialen Optimum muss der Preis des Gutes X somit den Grenzkosten β entsprechen.

(c) Die Gewinnmaximierung liefert die Bedingung erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \Pi_x &= P'(x^M) \cdot x^M + P(x^M) - K_x = 0 \\ &= -bx^M + a - bx^M - \beta = 0 \end{aligned}$$

Umstellen liefert die optimale Menge

$$x^M = \frac{a - \beta}{2b}$$

Setzt man diese Menge in die inverse Nachfragefunktion ein, so erhält man den Preis

$$p_x^M = \frac{a + \beta}{2}$$

den der Monopolist setzt. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass $p_x^M > p_x^*$:

$$\frac{a + \beta}{2} > \beta \quad \iff \quad a > \beta.$$

Dies gilt laut Aufgabenstellung und somit auch $p_x^M > p_x^*$.

Um den Wohlfahrtsverlust zu ermitteln, betrachten wir zunächst die Wohlfahrtsfunktion

$$\Omega = \int_0^x P(x)dx - K(x).$$

Für die Wohlfahrt im sozialen Optimum erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\Omega^* &= \left[ax^* - \frac{b}{2}(x^*)^2\right]_0^{\frac{a-\beta}{b}} - K(x^*) \\
&= a\left(\frac{a-\beta}{b}\right) - \frac{b}{2}\left(\frac{a-\beta}{b}\right)^2 - \beta x^* - \gamma \\
&= a\left(\frac{a-\beta}{b}\right) - \frac{b}{2}\left(\frac{a-\beta}{b}\right)^2 - \beta\left(\frac{a-\beta}{b}\right) - \gamma \\
&= \frac{(a-\beta)^2}{2b} - \gamma
\end{aligned}
$$

Die Wohlfahrt im Monopolgleichgewicht ist entsprechend:

$$\Omega^M = a\left(\frac{a-\beta}{2b}\right) - \frac{b}{2}\left(\frac{a-\beta}{2b}\right)^2 - \beta\left(\frac{a-\beta}{2b}\right) - \gamma = \frac{(a-\beta)^2}{b}\cdot\frac{3}{4} - \gamma.$$

Somit ergibt sich ein Wohlfahrtsverlust von:

$$\Omega^* - \Omega^M = \frac{(a-\beta)^2}{2b} - \gamma - \left[\frac{(a-\beta)^2}{2b}\cdot\frac{3}{4} - \gamma\right] = \frac{(a-\beta)^2}{2b}\cdot\frac{1}{4} > 0.$$

(d) Der Monopolist könnte auf den Grenzkostenpreis verpflichtet werden. In diesem Fall müsste die Regierung zur Sicherstellung der Produktion der effizienten Menge eine Subvention in Höhe der Fixkosten γ zahlen. Diese Subvention entfiele im Falle einer konvexen Produktionsfunktion mit Fixkosten von null.

(e) Da k_v auch den Grenzkosten entspricht, gibt die Ramsey-Regel an, dass Preisaufschläge auf die Grenzkosten invers proportional zur Preiselastizität sein sollen. Dementsprechend setzt der soziale Planer bei den Gütern die höchsten Preise, bei denen die Konsumenten am wenigsten substituieren (die Preiselastizität der Nachfrage ε_i ist relativ klein). Je elastischer die Nachfrage wird, desto größer ist der Rückgang an Konsumentenrente, wenn der Preis über die Grenzkosten angehoben wird, und desto kleiner fällt der Gebührenaufschlag aus. Die Ramsey-Regel beinhaltet daher eine Quersubventionierung. Das weniger preiselastische Gut subventioniert das preiselastische Gut.

(f) Zunächst bestimmen wir die Elastizitäten der beiden Güter:

$$\epsilon_x = \frac{D^x_{p_x}\cdot p_x}{D^x} = -\frac{p_x}{b(\frac{a-p_x}{b})} = -\frac{p_x}{a-p_x},$$

bzw.

$$\epsilon_y = \frac{D^y_{p_y}\cdot p_y}{D^y} = -\frac{p_y}{d(\frac{c-p_y}{d})} = -\frac{p_y}{c-p_y}.$$

Nun setzen wir ϵ_x in die Ramsey-Regel ein und erhalten

$$\frac{p_x-\beta}{p_x} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{a-p_x}{p_x}$$

Umstellen nach p_x liefert:

$$p_x = \frac{a \cdot \lambda + (1+\lambda)\beta}{1+2\lambda} = \frac{2a+3\beta}{5}.$$

Analog gilt für den Preis von Gut Y:

$$p_y = \frac{c \cdot \lambda + (1+\lambda)\beta}{1+2\lambda} = \frac{2c+3\beta}{5}.$$

Die Preise verwenden wir nun in den Nachfragefunktionen bezüglich der beiden Güter um die entsprechenden Mengen zu erhalten. Für die Menge von Gut X gilt:

$$x = \frac{a}{b} - \frac{a\lambda + (1+\lambda)\beta}{b(1+2\lambda)}.$$

Vereinfachen führt dann zu:

$$x = \frac{(1+\lambda)(a-\beta)}{b(1+2\lambda)} = \frac{3(a-\beta)}{5b}.$$

Analog folgt für die Menge von Gut Y:

$$y = \frac{(1+\lambda)(c-\beta)}{d(1+2\lambda)} = \frac{3(c-\beta)}{5d}.$$

Schließlich gilt $p_y > p_x$ genau dann, wenn $c > a$.

Aufgabe 2

(a) Dabei handelt es sich um eine quasi-lineare Nutzenfunktion. Dies erkennt man daran, dass die Steigungen der Indifferenzkurven für gegebenes x_i konstant sind. Somit hängt die individuelle Grenzzahlungsbereitschaft für z nicht von der Menge des Gutes X ab.

(b) In Abbildung 1 ist die gegebene Grafik vervollständigt. Das Individuum 1 ist hier der Medianwähler, da $z_2 < z_1 < z_3$.

(c) Die Grenzzahlungsbereitschaften der Individuen sind gegeben durch

$$GZB_h = \frac{U_z^h}{U_x^h} = \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{z}.$$

Zur Ermittlung der effizienten Menge z^* wird die Samuelson-Bedingung $\sum_{h=1}^{3} GZB_h = -T_z$ verwendet:

$$2 \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{3}.$$

Dies wird nun umgestellt und wir erhalten:

$$\frac{11}{3} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{3}.$$

Die effiziente Menge ist dann:

$$z^* = 11.$$

(d) Die individuellen Grenzzahlungsbereitschaften für die optimale Menge z^* betragen:

$$\begin{aligned} GZB_1(z^*) &= \frac{2}{11}, \\ GZB_2(z^*) &= \frac{1}{11}, \\ GZB_3(z^*) &= \frac{2}{33}. \end{aligned}$$

In der Abbildung 2 wird das Ergebnis aus (c) grafisch dargestellt.

(e) Zunächst setzen wir den impliziten Kaufpreis p_h in die Budgetrestriktion ein und stellen nach x_h um:

$$x_h = 10h - \frac{p \cdot y_h}{\sum_{h=1}^{3} y_h} \cdot z = 10h - \frac{p \cdot 10h}{60} \cdot z.$$

Dies setzen wir in den Nutzen von Individuum $h = 1$:

$$U^1(x_1, z) = 10 - \frac{p \cdot 10}{60} \cdot z_1 + 2 \cdot \ln z_1 - 1.$$

Ableiten nach z_1 liefert:

$$\frac{\partial U^1}{\partial z_1} = -\frac{p \cdot 10}{60} + 2 \cdot \frac{1}{z_1} = 0$$

Daraus folgt die aus Sicht der Person $h = 1$ optimale Menge:

$$\tilde{z}_1 = \frac{12}{p}.$$

Analog folgt für die Individuen $h = 2, 3$:

$$\tilde{z}_2 = \frac{3}{p},$$
$$\tilde{z}_3 = \frac{4}{3p}.$$

Da nun $\tilde{z}_3 < \tilde{z}_2 < \tilde{z}_1$, ist Individuum 2 der Medianwähler. Das Mehrheitswahlgleichgewicht ist daher durch $z_m = \frac{3}{p}$ charakterisiert. Ob eine Über- oder Unterversorgung eintritt, hängt vom Angebotspreis p des öffentlichen Gutes ab. Eine Unterversorgung $z_m < z^*$ tritt auf, wenn $\frac{3}{p} < 11$ und somit $p > \frac{3}{11}$. Entsprechend ist bei $p < \frac{3}{11}$ eine Überversorgung zu beobachten.

(f) Für $p = 1$ ergibt sich das Mehrheitswahlgleichgewicht $z_m = 3$. Der Nutzen des Medianwählers, hier Individuum 2, wird unter Berücksichtigung von $x_2 = 20 - \frac{1}{3} \cdot 3$ (siehe (e)) wie folgt ermittelt:

$$U^2(x_2 = 19, z_m = 3) = 19 + 1.1 - 1 = 19.1.$$

Nun soll überprüft werden, ob es sich für Individuum 2 lohnt, das präferierte Programm der anderen Wähler 1 und 3 anzugeben. Die entsprechenden Nutzenwerte ergeben analog zur vorigen Rechnung:

$$U^2(x_2 = 16, \tilde{z}_1 = 12) = 16 + 2.5 - 1 = 17.5,$$
$$U^2\left(x_2 = 19.56, \tilde{z}_3 = \frac{4}{3}\right) = 19.56 + 0.29 - 1 = 18.85.$$

Es ist direkt ersichtlich, dass eine Angabe von z_1 oder z_3 durch Individuum 2 zu einem geringeren Nutzen führt. Somit kann gezeigt werden, dass das Mehrheitswahlgleichgewicht individuell anreizverträglich ist.

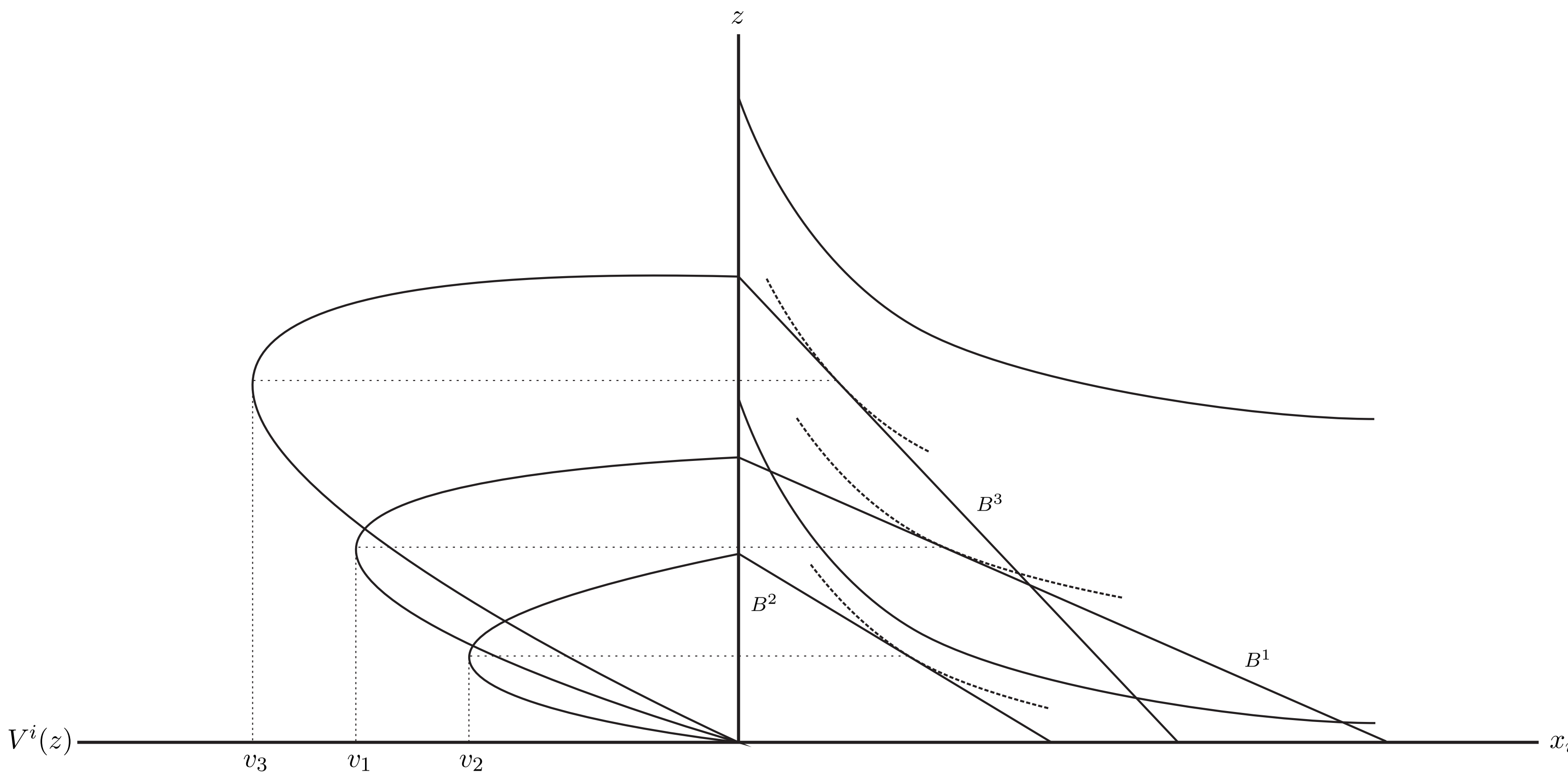

Abbildung 1: Aufgabenteile (a) und (b)

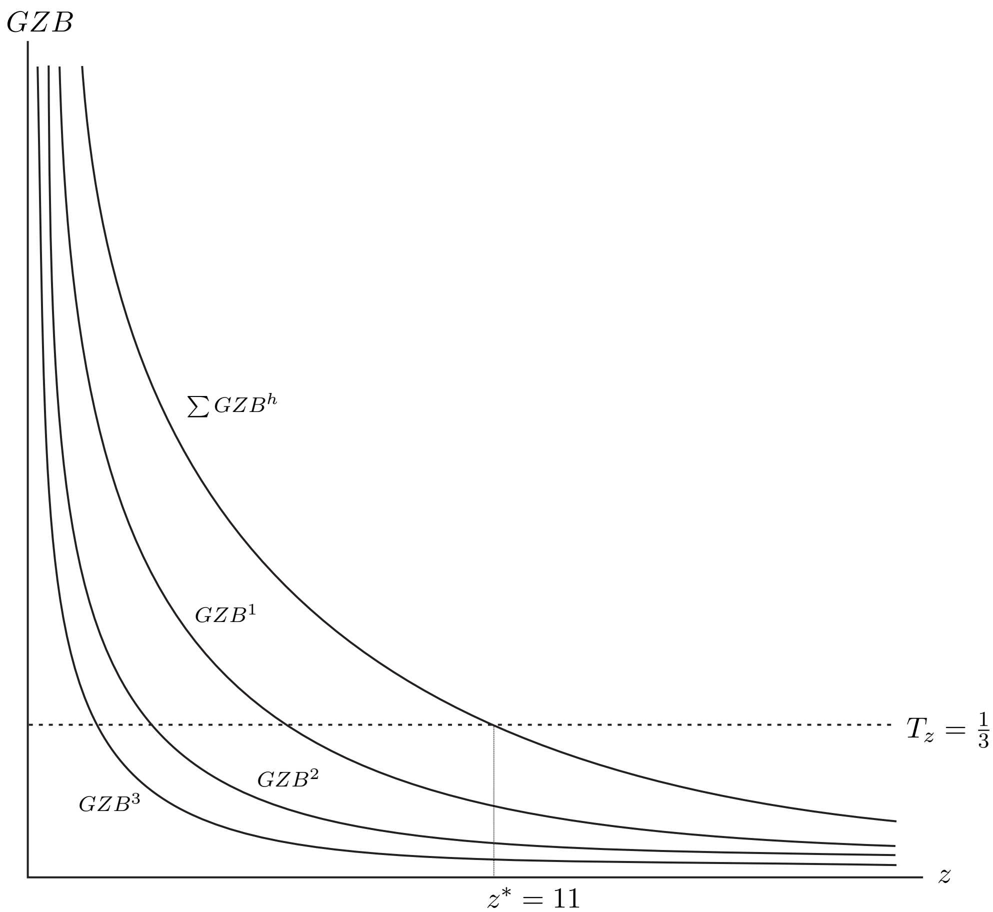

Abbildung 2: Aufgabenteil (d)