3

2011

Vorbemerkung: Es werden jeweils detaillierte Begründungen erwartet, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist.

Aufgabe 1

Seien (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $M \subset X$.

4 Punkte **(a)** Geben Sie möglichst präzise Definitionen der folgenden Aussagen:

- a ist innerer Punkt von M.
- a ist Berührpunkt von M.
- a ist Häufungspunkt von M.
- a ist Randpunkt von M.

6 Punkte **(b)** Beweisen Sie mithilfe der Definitionen aus Teilaufgabe (a) die folgenden Aussagen (aus dem Kurs):

- Jeder Berührpunkt von M ist innerer Punkt von M oder Randpunkt von M.
- Jeder Berührpunkt von M ist Element von M oder Häufungspunkt von M.

6 Punkte **Aufgabe 2**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{falls } {}^t(x, y, z) \neq {}^t(0, 0, 0), \\ 1, & \text{falls } {}^t(x, y, z) = {}^t(0, 0, 0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f in ${}^t(0, 0, 0)$

- stetig ist,
- einen Grenzwert besitzt.

($\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}$ seien wie üblich mit Normen versehen.)

Aufgabe 3

4 Punkte **(a)** Seien $M \subset \mathbb{R}^n$, a ein innerer Punkt von M und $f \in Abb(M, \mathbb{R})$. Geben Sie genaue Definitionen der Aussagen

- f ist in a differenzierbar.
- f ist in a nach der k-ten Koordinate partiell differenzierbar.

9 Punkte **(b)** Untersuchen Sie, in welchen Punkten $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y) := |x| + y$$

- partiell differenzierbar ist,
- differenzierbar ist.

Aufgabe 4

Seien $D := \{{}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ und

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y, z) := 2x + 4y + 4z\,.$$

2 Punkte **(a)** Begründen Sie mit geeigneten Sätzen aus dem Kurs, dass f Maximum und Minimum auf D annimmt.

9 Punkte **(b)** Bestimmen Sie $\max f(D)$ und $\min f(D)$.

7 Punkte **Aufgabe 5**

Die Kurve W sei gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \varphi(t) := \begin{pmatrix} t + \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass W rektifizierbar ist, und berechnen Sie $L(W)$, die Länge von W (bezüglich der euklidischen Norm). Tipp: $1 + \cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2}$

Aufgabe 6

Seien $V := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ und } 0 \leq xy \leq 1\}$ und

$$f : V \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y) := \frac{1}{xy + 1}\,.$$

3 Punkte **(a)** Begründen Sie, dass

$$T : \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u > 0 \right\} \to \mathbb{R}^2\,, \quad T(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ \frac{v}{u} \end{pmatrix}$$ c $\frac{v}{u}$

injektiv und stetig differenzierbar ist, und berechnen Sie $\det T'(u, v)$

5 Punkte **(b)** Beweisen Sie für $U := [1, 2] \times [0, 1]$ die Beziehung $T(U) = V$ und berechnen Sie $\int\limits_V f\, d\lambda_2 = \int\limits_{T(U)} f\, d\lambda_2$, indem Sie zunächst den Transformationssatz und dann den Satz von Fubini anwenden.

Analysis II (Bachelor) Wintersemester 2010/11

Klausur am 12.3.2011:

Lösungen zu den Klausuraufgaben

Vorbemerkung: Die Zitate aus dem Kurs mit Hilfe von Nummern wurden in der Klausur natürlich nicht von Ihnen erwartet.

Aufgabe 1

(a) Seien (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $M \subset X$. a heißt

- innerer Punkt von M, wenn M Umgebung von a ist.
- Berührpunkt von M, wenn in jeder Umgebung von a ein Punkt von M liegt.
- Häufungspunkt von M, wenn in jeder Umgebung von a ein Punkt von M liegt, der von a verschieden ist.
- Randpunkt von M, wenn in jeder Umgebung von a ein Punkt von M und ein Punkt von $X \setminus M$ liegt.

(b) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$.
Behauptung: Jeder Berührpunkt von M ist innerer Punkt von M oder Randpunkt von M.
Beweis: Sei a Berührpunkt von M und *kein* innerer Punkt von M. Sei ferner U eine Umgebung von a. Dann enthält U einen Punkt von M, weil a Berührpunkt von M ist. Außerdem ist $U \not\subset M$, denn sonst wäre a innerer Punkt von M. Also enthält U einen Punkt aus $X \setminus M$. Folglich ist a Randpunkt von M.

Behauptung: Jeder Berührpunkt von M ist Element von M oder Häufungspunkt von M.
Beweis: Sei a Berührpunkt von M und $a \notin M$. Sei ferner U eine Umgebung von a. Dann ist $U \cap M \neq \emptyset$. Wegen $a \notin U \cap M$ enthält U einen von a verschiedenen Punkt von M. Folglich ist a Häufungspunkt von M.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{falls } {}^t(x, y, z) \neq {}^t(0, 0, 0), \\ 1, & \text{falls } {}^t(x, y, z) = {}^t(0, 0, 0) \end{cases}$$

Behauptung: f ist in ${}^t(0, 0, 0)$ unstetig.

Beweis: Die Folge $\left({}^t\left(0,0,\frac{1}{k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ${}^t(0,0,0)$ für $k\to\infty$, weil jede Koordinatenfolge für $k\to\infty$ gegen 0 konvergiert. Ferner gilt

$$f\left(0,0,\frac{1}{k}\right) = 0 \to 0 \neq 1 = f(0,0,0) \quad \text{für} \quad k\to\infty .$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus dem Folgenkriterium.

Behauptung: $f(x,y,z)\to 0$ für ${}^t(x,y,z)\to {}^t(0,0,0)$.
Beweis: Für alle ${}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{{}^t(0,0,0)\}$ gilt

$$|f(x,y,z)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\,|y| \leq |y| .$$

Zu $\varepsilon>0$ wählen wir $\delta:=\varepsilon$. Für alle ${}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{{}^t(0,0,0)\}$ mit $\|{}^t(x,y,z)-{}^t(0,0,0)\|_\infty<\delta$ gilt dann

$$|f(x,y,z)-0| = |f(x,y,z)| \leq |y| \leq \|{}^t(x,y,z)\|_\infty < \delta = \varepsilon .$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus dem ε-δ-Kriterium.

Aus der zweiten Behauptung folgt natürlich auch die erste, weil $\lim\limits_{{}^t(x,y,z)\to{}^t(0,0,0)} f(x,y,z) = 0 \neq f(0,0,0)$ ist.

Aufgabe 3

(a) Seien $M\subset\mathbb{R}^n$, $a={}^t(a_1,\ldots,a_n)$ ein innerer Punkt von M und $f\in Abb(M,\mathbb{R})$

- f heißt differenzierbar in a, wenn es eine $(1,n)$–Matrix A gibt, sodass die Restfunktion, die durch $f(x)=f(a)+A(x-a)+r(x)$ definiert ist, die Eigenschaft

  $$\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{\|x-a\|}=0$$

  besitzt.

- f heißt in a nach der k-ten Koordinate partiell differenzierbar, wenn $f\circ\varphi_k$ in a_k differenzierbar ist. Dabei ist

  $$\varphi_k : \{x_k\in\mathbb{R} \mid {}^t(a_1,\ldots,a_{k-1},x_k,a_{k+1},\ldots,a_n)\in M\}\to\mathbb{R}^n ,$$
  $$\varphi_k(x_k) := {}^t(a_1,\ldots,a_{k-1},x_k,a_{k+1},\ldots,a_n) .$$

(b) Wir untersuchen, in welchen Punkten $\binom{a}{b}\in\mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad f(x,y):=|x|+y$$

partiell differenzierbar und in welchen Punkten sie differenzierbar ist.

Für $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ gilt $f(x,y) = x+y$, also ist für $M_1 := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ die Funktion $f|_{M_1}$ als Restriktion einer linearen Funktion differenzierbar. Da M_1 eine offene Menge ist, ist dann auch f in jedem Punkt $\binom{a}{b} \in M_1$ differenzierbar (Ü 3.3.1). Weiter gilt $f(x,y) = -x+y$ für $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $x < 0$. Also ist $f|_{M_2}$ für $M_2 := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ ebenfalls als Restriktion einer linearen Funktion differenzierbar und wegen der Offenheit von M_2 ist auch f in jedem Punkt $\binom{a}{b} \in M_2$ differenzierbar. Folglich ist f in jedem Punkt $\binom{a}{b} \in M_1 \cup M_2$ auch partiell differenzierbar (3.4.3).
Wir zeigen nun, dass f in keinem Punkt $\binom{0}{b}$ mit $b \in \mathbb{R}$ nach der ersten Koordinate partiell differenzierbar ist. Dazu definieren wir $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\varphi_1(x) := \binom{x}{b}$ und erhalten

$$(f \circ \varphi_1)(x) = f(x,b) = |x| + b\,.$$

Wäre nun $f \circ \varphi_1$ in 0 differenzierbar, so wäre auch die Funktion $x \to (f \circ \varphi_1)(x) - b = |x|$ in 0 differenzierbar, im Widerspruch dazu, dass die Betragsfunktion in 0 nicht differenzierbar ist. Weil f nicht partiell differenzierbar in $\binom{0}{b}$ für $b \in \mathbb{R}$ ist, ist f in diesen Punkten auch nicht differenzierbar (3.4.3).

Aufgabe 4
Seien $D := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ und

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) := 2x + 4y + 4z\,.$$

(a) Da D abgeschlossen und beschränkt ist, ist D kompakt (Satz von Heine-Borel). Die Funktion f ist als Polynom stetig und nimmt daher Maximum und Minimum auf D an (Satz vom Maximum).

(b) Wir bestimmen die nach Teilaufgabe (a) existierenden $\max f(D)$ und $\min f(D)$. Wegen

$$f'(x,y,z) = (2,4,4) \neq (0,0,0)$$

besitzt f in den inneren Punkten von D kein Extremum.
f kann daher Maximum und Minimum nur in den Randpunkten von D annehmen, das sind die Punkte ${}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Wir bestimmen diese Punkte mit Hilfe der Lagrange–Multiplikatoren. Dazu sei

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 4\,.$$

f und g sind stetig differenzierbar und die Menge

$$M(g) := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0\} = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

ist nicht leer. Außerdem hat $g'(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ für jedes ${}^t(x,y,z) \in M(g)$ den Höchstrang 1, weil ${}^t(0,0,0) \notin M(g)$ ist. Hat nun $f|_{M(g)}$ in einem Punkt ${}^t(a,b,c) \in M(g)$ ein lokales Extremum, so gibt es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f'(a,b,c) = \lambda g'(a,b,c)$, d. h.

$$(2,4,4) = 2\lambda(a,b,c)$$

Also ist $\lambda \neq 0$ und $(a,b,c) = \frac{1}{2\lambda}(2,4,4)$. Aus der Bedingung $g(a,b,c) = 0$ folgt

$$\frac{1}{4\lambda^2}(4+16+16) = 4, \quad \text{d. h.} \quad \lambda = \pm\frac{3}{2}$$

Also hat f höchstens in den Punkten

$$\frac{1}{3}{}^t(2,4,4) \quad \text{und} \quad -\frac{1}{3}{}^t(2,4,4)$$

lokale Extrema. Nach Teilaufgabe (a) müssen in diesen Punkten tatsächlich Extrema vorliegen und wegen

$$f\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) = 12 \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right) = -12$$

ist $\max f(D) = 12$ und $\min f(D) = -12$.

Aufgabe 5

Die Kurve W sei gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) := \begin{pmatrix} t+\sin t \\ 1+\cos t \end{pmatrix}.$$

Die Kurve besitzt einen Anfangs- und einen Endpunkt, die Parameterdarstellung ist offensichtlich stetig differenzierbar und es gilt

$$\dot\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

Weiter erhalten wir

$$\|\dot\varphi(t)\|_2^2 = (1+\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1+\cos t) = 4\cos^2\frac{t}{2},$$

d. h. $\|\dot\varphi(t)\|_2 = 2\left|\cos\frac{t}{2}\right|$. Wegen des Vorzeichenverhaltens von $\cos$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \|\dot\varphi(t)\|_2\,dt &= \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\frac{t}{2}\right| dt = \int_0^{\pi} 2\cos\frac{t}{2}\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} 2\cos\frac{t}{2}\,dt = 4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} - 4\sin\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= 4(1-0) - 4(0-1) = 8.\end{aligned}$$

Da das Integral existiert, ist W rektifizierbar und $L(W) = 8$.

Aufgabe 6

Seien $V := \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ und } 0 \leq xy \leq 1\right\}$ und

$$f : V \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \frac{1}{xy+1}$$

(a) Sei $T : \{\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\} \to \mathbb{R}^2$, $T(u,v) := \binom{u}{\frac{v}{u}}$. Dann ist T injektiv; denn sind $\binom{s}{t}, \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $s > 0$ und $u > 0$ und gilt $T(s,t) = T(u,v)$, so gilt $s = u$ und $\frac{t}{s} = \frac{v}{u}$. Aus der zweiten Gleichung folgt mit Hilfe der ersten, dass $t = v$ gilt, also $\binom{s}{t} = \binom{u}{v}$.

Da die Komponenten von T Restriktionen rationaler Funktionen sind, ist T stetig differenzierbar mit

$$T'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det T'(u,v) = \frac{1}{u}$$

(b) Sei $U := [1,2] \times [0,1]$. Dann gilt $T(U) \subset V$; denn ist $\binom{u}{v} \in U$, so ist $u \in [1,2]$ und $u\frac{v}{u} = v \in [0,1]$, d. h. $T(u,v) = \binom{u}{\frac{v}{u}} \in V$. Ferner ist $V \subset T(U)$; denn ist $\binom{x}{y} \in V$, so ist $x \in [1,2]$ und $xy \in [0,1]$, also $\binom{x}{xy} \in U$ und $T(x, xy) = \binom{x}{y}$, d. h. $\binom{x}{y} \in T(U)$. Insgesamt gilt also $T(U) = V$.

Der Transformationssatz liefert nun

$$\begin{aligned}
\int_V f\,d\lambda_2 &= \int_{T(U)} f\,d\lambda_2 = \int_U T^* f\,d\lambda_2 = \int_U (f \circ T)|\det T'|\,d\lambda_2 \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{u\frac{v}{u} + 1} \frac{1}{u}\,dv \right) du = \left(\int_1^2 \frac{1}{u}\,du \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{v+1}\,dv \right) \\
&= \ln u \Big|_1^2 \ln(v+1) \Big|_0^1 = (\ln 2)^2 .
\end{aligned}$$