

---

# Lösungen der Klausur Mathematische Grundlagen (1141) WS 07/08

Klausur am 09.02.2008:

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

---

## zu Aufgabe 1

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$A' = \left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Diese Matrix überführen wir in Treppennormalform und erhalten

$$T' = \left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Links des Strichs steht die Treppennormalform  $T$  der Koeffizientenmatrix  $A$ .

Wir führen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch ist und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung des linearen Gleichungssystems. Wir fügen nun  $-1$  überall auf der Diagonalen ein, wo  $0$  steht.

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

An dieser Matrix können wir die Lösungsmenge ablesen: Eine spezielle Lösung steht rechts des Strichs, und die Lösungsmenge des homogenen Systems ist die Menge der Linearkombinationen der Spalten, in denen wir  $-1$  eingeführt haben. Es folgt:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

### zu Aufgabe 2

1. Seien  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$  in  $V$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f(A+B) &= \begin{pmatrix} 2a+2x & b+c+y+z \\ b+c+y+z & 2d+2u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2u \end{pmatrix} = f(A) + f(B). \end{aligned}$$

Seien  $x \in \mathbb{R}$  und  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ . Dann gilt

$$f(xA) = \begin{pmatrix} 2xa & xb+xc \\ xb+xc & 2xd \end{pmatrix} = xf(A).$$

Es folgt, dass  $f$  linear ist.

2. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(f) &= \langle f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}) \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Die Matrizen  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von  $\text{Bild}(f)$ .

Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)),$$

also  $\dim(\text{Kern}(f)) = 4 - 3 = 1$ . Es reicht also, eine linear unabhängige Matrix in  $\text{Kern}(f)$  zu finden.

Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann gilt  $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , also  $A \in \text{Kern}(f)$ . Somit ist  $A$  eine Basis von  $\text{Kern}(f)$ .

### zu Aufgabe 3

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium. Die Nullmatrix liegt in  $V$ . Seien

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in V$ . Dann gilt  $A + B = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix} \in V$ . Sei

$r \in \mathbb{R}$ , und sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V$ . Dann gilt  $(rA) = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rb & rc \end{pmatrix}$ , also  $rA \in V$ . Mit dem

Unterraumkriterium folgt, dass  $V$  ein Unterraum von  $M_{22}(\mathbb{R})$  ist.

### zu Aufgabe 4

Für den Induktionsanfang sei  $n = 1$ . Es sind  $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$ . Es gilt somit der Induktionsanfang.

In der Induktionsannahme nehmen wir an, es sei  $n \geq 1$  und es gelte  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle  $n \in \mathbb{N}$  richtig ist.

**zu Aufgabe 5**

Es gilt  $(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n) = n^2 + n - n^2 = n$ . Es folgt

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n})} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$ . Da die konstante Folge (1) und die Folge  $(1 + \frac{1}{n})$  konvergent sind und den Grenzwert 1 haben, konvergiert  $(\sqrt{1 + \frac{1}{n}})$  ebenfalls gegen 1. Somit ist die Folge  $(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1})$  konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \right) = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

**zu Aufgabe 6**

Wir verwenden zum Beweis das Quotientenkriterium. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}. \end{aligned}$$

Es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{4n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}} \right) = \frac{1}{4} < 1$ . Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

**zu Aufgabe 7**

Sei  $x \in I$ . Ist  $x \in I \cap \mathbb{Q}$ , so gilt nach Annahme  $f(x) = g(x)$ . Wir können also annehmen, dass  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist. Da  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  liegt, gibt es eine Folge  $(x_n)$ , deren Glieder alle in  $\mathbb{Q}$  liegen, und die den Grenzwert  $x$  hat. Es folgt  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$ , denn  $f$  und  $g$  sind stetig.

**zu Aufgabe 8**

Sei  $f(x) = \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$ , und sei  $g(x) = \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$ . Mit der Kettenregel gilt

$$f'(x) = g'(x) \cdot \frac{1}{2} g(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} g'(x) \left( \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Sei  $h(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ . Dann gilt wieder mit der Kettenregel

$$g'(x) = h'(x) \cos\left(\frac{\cos(x)}{x}\right).$$

Mit der Quotientenregel gilt

$$h'(x) = \frac{x(-\sin(x)) - \cos(x)}{x^2}.$$

Es folgt

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{x(-\sin(x)) - \cos(x)}{x^2} \cos\left(\frac{\cos(x)}{x}\right) \left(\sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

### zu Aufgabe 9

1. (a) Sei  $U = \mathbb{N}$  das Universum.  
(b) Seien  $\mathcal{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$  und  $\mathcal{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Dann ist  $\mathbf{P}$  die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und  $\mathbf{Q}$  ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Da jede natürliche Zahl gerade oder ungerade ist, ist  $\mathcal{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{1}$ .
2. (a) Sei  $U = \mathbb{N}$  das Universum.  
(b) Seien  $\mathcal{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$  und  $\mathcal{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Dann ist  $\mathbf{P}$  die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und  $\mathbf{Q}$  ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen, die  $\geq 3$  sind. Da 1 weder in  $\mathbf{P}$  noch in  $\mathbf{Q}$  liegt, ist  $\mathcal{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{0}$ .